

# Über $\alpha$ -minimierende Hyperkegel

Inauguraldissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades „Dr. rer. nat.“

Der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen  
vorgelegt von

Peter LEWINTAN  
aus Moskau

– November 2017 –

Gutachter:

Prof. Dr. Ulrich DIERKES

Prof. Dr. Steffen FRÖHLICH

Vorsitzender des Prüfungsausschusses: Prof. Dr. Andreas GASTEL

Datum der mündlichen Prüfung: 01. März 2018



<b>Abstract (engl.)</b>	<b>4</b>
<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Lokale Minimierer der <math>\alpha</math>-Energie</b>	<b>8</b>
1.1 Das verbesserte Resultat und der bisherige Stand der Forschung . . . . .	8
1.2 Notationen . . . . .	9
1.3 Einige Eigenschaften des $\alpha$ -Perimeters . . . . .	10
1.4 Der klassische Fall . . . . .	11
1.4.1 Eine notwendige Bedingung . . . . .	12
1.4.2 Eine hinreichende Bedingung . . . . .	12
1.4.3 Über kritische Blätterungen . . . . .	13
1.5 Eine kurze Bemerkung zur Geschichte der Feldtheorie . . . . .	16
1.6 Ein erster Ansatz . . . . .	17
1.7 Reduzierung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung . . . . .	24
1.8 Ein Lemma aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . . .	25
1.9 Ein Lemma ein spezielles biquadratisches Polynom betreffend . . . . .	30
1.10 Beweis von Satz 1 . . . . .	35
<b>2 Die Situation bei ganzzahligem <math>\alpha</math></b>	<b>42</b>
2.1 Das mittlere Krümmungsvektorfeld auf Untermannigfaltigkeiten . . . . .	42
2.2 Rotationssymmetrische Hyperflächen . . . . .	43
2.2.1 Das mittlere Krümmungsvektorfeld . . . . .	43
2.2.2 Eine Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung . . . . .	45
2.3 Zweite Variation des gewichteten Area-Funktional . . . . .	47
2.3.1 Die Norm der zweiten Fundamentalform . . . . .	50
2.3.2 Punktweise Krümmungsabschätzungen . . . . .	53
<b>3 Ausblick</b>	<b>55</b>
<b>4 Literatur</b>	<b>56</b>

In this work we consider critical hypersurfaces of the  $\alpha$ -energy. In the first part we extend the class of known  $\alpha$ -minimizing hypercones using sub-calibration methods. Indeed, improvement of previous results follow from a careful analysis of special cubic and quartic polynomials. In the second part we consider critical hypersurfaces in case of integer  $\alpha$ . It is known that a rotation of such hypersurfaces leads to minimal hypersurfaces. We show that hereby also stability conditions are being transferred. Hence, we arrive at pointwise curvature estimates on  $\alpha$ -stable hypersurfaces, for integer  $\alpha$ , from the theory of minimal surfaces.

Seien  $P_0$  und  $P_1$  zwei von einander verschiedene Punkte im  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Auf der Klasse

$$\mathcal{C} := \{ \mathfrak{K}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ Lipschitz-stetig mit } \mathfrak{K}(0) = P_0, \mathfrak{K}(1) = P_1 \}$$

von Lipschitz-stetigen Vergleichskurven mit fixierten Randpunkten betrachten wir für  $\alpha \geq 0$  das Variationsproblem

$$\int y^\alpha d\mathcal{H}^1(x, y) \rightarrow \min.$$

So suchen wir mit  $\alpha = 0$  nach der kürzesten Verbindung zwischen  $P_0$  und  $P_1$ , bei  $\alpha = \frac{1}{2}$  haben wir eine parametrische Form des Brachistochronen-Problems, und der Fall  $\alpha = 1$  führt zu minimalen Rotationsflächen des  $\mathbb{R}^3$ . Auf der anderen Seite erhalten wir das Variationsintegral mit  $\alpha = 1$ , sobald wir die potentielle Energie von Ketten ( mit konstanter Masseverteilung ) in einem ( konstanten vertikalen ) Gravitationsfeld betrachten.

Es ist klar, dass die kürzeste Verbindung zwischen  $P_0$  und  $P_1$  ( in der Ebene ) die Strecke  $\overline{P_0 P_1}$  ist.

Im Falle  $\alpha = \frac{1}{2}$  wurde die minimierende Kurve Brachistochrone genannt.

Ferner kann das Variationsproblem bei  $\alpha = 1$  und geeigneter Lage der Punkte  $P_0$  und  $P_1$  zwei von einander verschiedene Lösungen besitzen: Eine Kettenlinie ( ein Ausschnitt des Cosinus hyperbolicus ) und eine sogenannte Goldschmidt-Lösung, welche aus drei Geradenstücken besteht, nämlich  $\overline{P_0 \pi_x(P_0)}$ ,  $\overline{\pi_x(P_0) \pi_x(P_1)}$  und  $\overline{\pi_x(P_1) P_1}$ , wobei  $\pi_x(\cdot)$  die Projektion auf die Abszissenachse bezeichnet, vgl. GIAQUINTA & HILDEBRANDT [2, ch. 8 sec. 4.3].

Der Nachweis der Minimalität einer Lösung obiger Variationsprobleme kann zum Beispiel durch eine Einbettung der Lösungskurve in ein ein-parametrisches Feld disjunkter extremaler Kurven ( das heißt, Lösungen der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung ) geschehen, für den Nachweis der genannten Probleme vgl. GIAQUINTA & HILDEBRANDT [1, ch. 6 sec. 2.3].

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir das entsprechende Variationsproblem in höheren Dimensionen:

So weisen wir im ersten Kapitel die minimierende Eigenschaft spezieller Kegel nach, wobei wir auch hierbei nach einer passenden Blätterung suchen. Tatsächlich werden wir unsere Betrachtungen zunächst weiter abschwächen, und „innere“ und „äußere“ Variationen gesondert betrachten. Der Clou besteht nun darin, eine geeignete Ausgangsfunktion zu wählen, deren Niveaumengen Extremale beziehungsweise „Sub-Lösungen“ sind. Jeder dieser Ansätze hat seine Vor- und Nachteile. Wir werden sehen, dass wir bei Betrachtungen von Sub-Lösungen eine konkrete Ausgangsfunktion

wählen können. Diese Ergebnisse werden wir durch Untersuchungen von Extremalen verbessern, jedoch mit dem Verlust einer expliziten Darstellung der Ausgangsfunktion. Dabei werden wir letztere Ausgangsfunktion aus Betrachtungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung gewinnen. Diese gewöhnliche Differentialgleichung wiederum erhalten wir als Euler-Lagrange-Gleichung eines ein-dimensionalen Variationsproblems, welches aus einer Reduktion bezüglich der Rotationssymmetrie folgt. Die Existenz der Lösung der so gewonnenen gewöhnlichen Differentialgleichung schließen wir aus der Existenz geeigneter Sub- und Superlösungen derselben Differentialgleichung.

Es sei bemerkt, dass wir in der vorliegenden Arbeit eine Note bezüglich der gegenseitigen Lage von Sub-, Super- und konkreten Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben haben. Es stellt sich nämlich heraus, dass, unabhängig von der Art der Sub- und Superlösungen und der topologischen Gestalt des zugrunde liegenden Intervalls, es immer eine Lösung gibt, welche zwischen der Sub- und Superlösung über dem ganzen Intervall liegt.

Mit anderen Worten werden wir das ursprüngliche Problem auf das Auffinden geeigneter Sub- und Superlösungen zurückführen. Hierbei werden unsere Untersuchungen in Betrachtungen spezieller Polynome enden. Mit Hilfe von Überlegungen aus der geometrischen Maßtheorie einen „gewichteten“ Perimeter betreffend werden wir zur ursprünglichen Problemstellung zurückkehren.

Erste Beispiele  $\alpha$ -minimierender Hyperkegel gehen auf die Arbeiten von Ulrich DIERKES [1] und [2] zurück. Da er sich dabei auf Resultate aus der Theorie Perimeter minimierender Kegel stützte, bleiben seine unteren Schranken für zulässiges  $\alpha$  ( bei festgehaltener Dimension ) ganzzahlig.

Die vorliegende Arbeit zeigt auf zwei verschiedene Weisen, wie wir kleinere Schranken – als von DIERKES angegeben – erhalten können. Dabei werden wir das Argumentationsschema aus [DAVINI] beziehungsweise [DE PHILIPPIS & PAOLINI] den Perimeter betreffend auf unseren  $\alpha$ -Perimeter übertragen. Die Verbesserungen der Schranken rühren dann aus eingehenden Untersuchungen der resultierenden Polynome.

Im zweiten Kapitel betrachten wir kritische  $C^2$ -Hyperflächen genauer und insbesondere die Situation bei ganzzahligem  $\alpha$ .

Es ist wohlbekannt, dass eine Rotation solcher Hyperflächen zu minimalen Hyperflächen führt, vgl. [PALAIS], aber auch DIERKES [6]. Wir werden sehen, dass sich auch die jeweilige Stabilität übertragen lässt. So erhalten wir dann sofort punktweise Krümmungsabschätzungen, indem wir auf die entsprechenden Resultate aus der Theorie minimaler Hyperflächen zurückgreifen.

Es sei bemerkt, dass DIERKES in [5] bereits punktweise Krümmungsabschätzungen für beliebiges  $\alpha > 0$  angegeben hat, jedoch dabei Fallunterscheidungen treffen musste. Diese resultierten aus einer Kleinheitsbedingung bei einer Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung für das vorliegende Variationsintegral. Diese Kleinheitsbedingung entfällt, wenn wir an das Problem über minimale Ro-

tationsflächen herangehen, jedoch mit dem Einbüßen, dass eine solche Argumentation „nur“ für ganzzahliges  $\alpha$  gültig ist.

In eigener Angelegenheit:

Vielen Dank, Herr DIERKES, für das Aufmerksammachen auf diese Problemstellungen sowie die unterstützende Betreuung.

Die vorliegende Arbeit entstand an der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen. Im Kollegenkreis fanden unzählige wertvolle Diskussionen – auch nicht-mathematischer Natur – sowie gemeinsame Ausbildung der Studierenden statt.

Der positive Rückhalt aller meiner Familienmitglieder rundete die Sache ab.

## 1.1 Das verbesserte Resultat und der bisherige Stand der Forschung

Sei  $\mathcal{M}$  eine orientierte Lipschitz-Hyperfläche im  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Ihre  $\alpha$ -Energie<sup>1</sup> ist gegeben durch

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{M}) := \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha d\mathcal{H}^m(x),$$

wobei wir die Notation  $x = (\underline{x}, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  benutzen und mit  $\mathcal{H}^m$  das  $m$ -dimensionale Hausdorff-Maß bezeichnen.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Existenz minimierender Kegel nachzuweisen, genauer:

**Satz 1.** Für jedes  $m = 2, 3, \dots$  existiert eine algebraische Zahl  $\alpha_m > \frac{2}{m}$ , sodass der Kegel

$$\mathcal{C}_m^\alpha := \left\{ 0 \leq x_{m+1} \leq \sqrt{\frac{\alpha}{m-1}} |\underline{x}| \right\}, \quad \text{wobei } \alpha \geq \alpha_m \text{ beliebig,}$$

ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Minimierer in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist.

### Bemerkung 1:

In Anlehnung an Untersuchungen den Perimeter betreffend, sprechen wir in der vorliegenden Arbeit von „ $\mathcal{P}_\alpha$ -Minimierern“. Eine präzise Definition geben wir im folgenden Abschnitt. Alternativ könnten wir in Satz 1 sagen, dass die Kegelmäntel

$$\mathcal{M}_m^\alpha := \partial \mathcal{C}_m^\alpha = \{ \sqrt{m-1} x_{m+1} = \sqrt{\alpha} |\underline{x}| \}, \quad \text{wobei } \alpha \geq \alpha_m \text{ beliebig,}$$

$\alpha$ -minimierend (in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ ) sind, wobei wir den Rand bezüglich der Teilraumtopologie verstehen.

### Bemerkung 2:

In unserem Beweis geben wir in Abhängigkeit von  $m$  ein Polynom  $p_m(\cdot)$  an, welches das jeweilige  $\alpha_m$  als eindeutige positive Nullstelle charakterisiert, vgl. S. 33. Ferner haben wir  $\alpha_m < \frac{12}{m}$  für alle  $m = 2, 3, \dots$ , sodass  $\alpha_m \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ .

### Bemerkung 3:

Erste (ganzzahlige) Abschätzungen gehen auf die Arbeiten von Ulrich DIERKES [1] und [2] zurück, dabei wurden in [1] folgende Schranken angegeben:

$$\alpha_2 = 11, \quad \alpha_3 = 6, \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 3, \quad \alpha_7 = \dots = \alpha_{11} = 2 \quad \text{und} \quad \alpha_m = 1 \quad \text{für } m \geq 12,$$

---

<sup>1</sup>Die Bezeichnung wurde von DIERKES eingeführt, da wir im Falle  $\alpha = 1$  die potentielle Energie erhalten (falls  $\mathcal{M}$  eine konstante Masseverteilung hat).



welche in der darauffolgenden Arbeit [2] verbessert wurden zu:

$$\alpha_2 = 6, \quad \alpha_3 = 4, \quad \alpha_4 = 3, \quad \alpha_5 = \alpha_6 = 2 \quad \text{und} \quad \alpha_m = 1 \quad \text{für} \quad m \geq 7.$$

Unsere Untersuchungen zeigen, dass auch diese Grenzen weiter verbessert werden können, nämlich:

$$\begin{array}{lll} \alpha_2 \approx 5,881525129 & \alpha_7 \approx 0,963594772 & \alpha_{12} \approx 0,357996307 \\ \alpha_3 \approx 3,958758640 & \alpha_8 \approx 0,728989161 & \alpha_{13} \approx 0,317117533 \\ \alpha_4 \approx 2,829350458 & \alpha_9 \approx 0,581153278 & \vdots \\ \alpha_5 \approx 1,969224627 & \alpha_{10} \approx 0,481712568 & \alpha_{2017} \approx 0,001377480 \\ \alpha_6 \approx 1,352500103 & \alpha_{11} \approx 0,410855526 & \vdots \end{array}$$

Dabei gleicht die Vorgehensweise den Untersuchungen von Perimeter-minimierenden Kegeln, wobei unter der Ausnutzung der Rotationssymmetrie das Variationsproblem auf ein eindimensionales Problem zurückgeführt wird. Schließlich können die Betrachtungen auf Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung reduziert werden. DIERKES orientierte sich in [1] an der gemeinsamen Arbeit von Enrico BOMBIERI, Ennio DE GIORGI und Enrico GIUSTI. Seine Verbesserungen der Grenzen in [2] erhielt DIERKES durch eine genauere Analyse der Richtungsfelder basierend auf der Dissertation von Plinio SIMÕES. DIERKES Ausarbeitungen sind auch in seiner Habilitationsschrift DIERKES [3] aufgeführt. Der Arbeit von Andrea DAVINI folgend werden wir unsere Verbesserungen des Resultates erhalten, indem wir die Existenz einer gewissen Lösung nachweisen.

#### Bemerkung 4:

Für alle  $m = 2, 3, \dots$  haben wir  $m + \alpha_m \geq 4 + \sqrt{8}$ , vgl. Bem. 1 auf S. 41, sodass direktes Nachrechnen, vgl. DIERKES et al. [2, p. 168] zeigt, dass alle Kegelmäntel  $\mathcal{M}_m^\alpha$ , wobei  $\alpha \geq \alpha_m$  beliebig, (natürlich)  $\mathcal{E}_\alpha$ -stabil sind. Auf den Stabilitätsbegriff werden wir genauer auf S. 49 eingehen.

#### Bemerkung 5:

Der Hyperkegel  $\mathcal{M}_2^5$  bzw.  $\mathcal{M}_6^1$  ist zwar  $\mathcal{E}_5$ - bzw.  $\mathcal{E}_1$ -stabil, jedoch ist der Kegel  $\mathcal{C}_2^5$  bzw.  $\mathcal{C}_6^1$  kein (lokaler)  $\mathcal{P}_5$ - bzw.  $\mathcal{P}_1$ -Minimierer, vgl. DIERKES [2]. Somit bleibt noch die Frage nach der Optimalität unserer Grenzen  $\alpha_m$ .

## 1.2 Notationen

Arbeiten wir in unseren Untersuchungen im Halbraum  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so verstehen wir die topologischen Begriffe entsprechend der Teilraumtopologie. Sei also  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  offen. Für uns von Interesse ist die Funktionenklasse

$$BV^\alpha(\Omega) := \left\{ f \in L_1(\Omega) : \int_\Omega (x_{m+1})^\alpha |Df| < \infty \right\},$$

wobei

$$\int_\Omega (x_{m+1})^\alpha |Df| := \sup \left\{ \int_\Omega f(x) \operatorname{div}(\psi(x)) dx : \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{m+1}), |\psi(x)| \leq (x_{m+1})^\alpha \right\}.$$

Unter  $f \in BV_{\text{loc}}^\alpha(\Omega)$  verstehen wir, dass  $f \in BV^\alpha(\mathcal{U})$  für alle offenen Mengen  $\mathcal{U} \subset\subset \Omega$ .

Tatsächlich weichen wir ein wenig von der von DIERKES in [1] gewählten Definition

$$\int_{\Omega} (x_{m+1})^\alpha |Df| := \sup \left\{ \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div}((x_{m+1})^\alpha \psi(x)) dx : \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{m+1}), |\psi(x)| \leq 1 \right\}$$

ab. Jedoch sind die beiden Ausdrücke für  $\alpha \geq 1$  äquivalent, vgl. DIERKES [3, Lemma 1.5].

Die erste Definition eröffnet uns aber die Möglichkeit auch für  $\alpha \in (0, 1)$  und offene Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Divergenz des Vektorfeldes klassisch zu bestimmen.

DIERKES selbst weist in [2] auf beide Möglichkeiten hin; da er jedoch ausschließlich die Fälle  $\alpha \geq 1$  betrachtet, bleibt er bei der letztgenannten Definition. Wir zeigen in der vorliegenden Arbeit, dass für  $m \geq 7$  auch  $\alpha \in (0, 1)$  gewählt werden kann, sodass wir hier die erste Definition verfolgen.

Sei  $E \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  Lebesgue-messbar<sup>2</sup>. Dann heißt

$$\mathcal{P}_\alpha(E; \Omega) := \int_{\Omega} (x_{m+1})^\alpha |D\chi_E| = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}(\psi(x)) dx : \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{m+1}), |\psi(x)| \leq (x_{m+1})^\alpha \right\}$$

der  **$\alpha$ -Perimeter von  $E$  in  $\Omega$** . Wir sagen, dass  $E$  einen **endlichen  $\alpha$ -Perimeter in  $\Omega$**  hat, falls  $\chi_E \in BV^\alpha(\Omega)$ . Gilt hingegen  $\chi_E \in BV_{\text{loc}}^\alpha(\Omega)$ , so sagen wir, dass  $E$  einen *lokal endlichen  $\alpha$ -Perimeter in  $\Omega$*  besitzt und nennen  $E$  eine  **$\alpha$ -Caccioppoli-Menge in  $\Omega$** . Mit dem Divergenzsatz folgt:

### Beispiel 1:

Sei  $E \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  offen mit  $C^2$ -Rand, dann ist  $E$  eine  $\alpha$ -Caccioppoli-Menge und der  $\alpha$ -Perimeter von  $E$  stimmt mit der  $\alpha$ -Energie des Randes  $\partial E$  überein:

$$\mathcal{P}_\alpha(E; \Omega) = \int_{\partial E \cap \Omega} (x_{m+1})^\alpha d\mathcal{H}^m(x) = \mathcal{E}_\alpha(\partial E \cap \Omega)$$

für alle offenen Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

### Beispiel 2:

Sei  $E \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  offen mit Lipschitz-Rand, dann ist  $E$  eine  $\alpha$ -Caccioppoli-Menge und der  $\alpha$ -Perimeter von  $E$  stimmt mit der  $\alpha$ -Energie des Randes  $\partial E$  überein:

$$\mathcal{P}_\alpha(E; \Omega) = \mathcal{E}_\alpha(\partial E \cap \Omega)$$

für alle offenen Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

## 1.3 Einige Eigenschaften des $\alpha$ -Perimeters

In direkter Übertragung der Resultate den Perimeter betreffend, vgl. z.B. die Monographien [GIUSTI] und [MAGGI], halten wir in diesem Abschnitt die für uns relevanten Eigenschaften des  $\alpha$ -Perimeters fest, wobei wir für einen Nachweis auf die entsprechenden Beweise in den gerade genannten Monographien verweisen.

<sup>2</sup>Als Lebesgue-Maß verstehen wir hier und im Folgenden das äußere Lebesgue-Maß, vgl. [MAGGI].

Seien nun  $E$  und  $F$  zwei  $\alpha$ -Caccioppoli-Mengen in einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dann gilt

i) für den  $\alpha$ -Perimeter des Komplements:  $\mathcal{P}_\alpha(\Omega \setminus E; \Omega) = \mathcal{P}_\alpha(E; \Omega)$ .

ii)  $\mathcal{P}_\alpha(E \cap F; \Omega) + \mathcal{P}_\alpha(E \cup F; \Omega) \leq \mathcal{P}_\alpha(E; \Omega) + \mathcal{P}_\alpha(F; \Omega)$ ,

wobei Gleichheit im Fall  $\text{dist}(E, F) > 0$  gilt.

Insbesondere sind also  $E \cap F$  und  $E \cup F$  auch  $\alpha$ -Caccioppoli-Mengen in  $\Omega$ .

iii) Sei  $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$  offen, dann gilt  $\mathcal{P}_\alpha(E; \tilde{\Omega}) \leq \mathcal{P}_\alpha(E; \Omega)$ ,

wobei Gleichheit im Fall  $E \subset\subset \tilde{\Omega}$  eintritt.

Seien nun Lebesgue-messbare Mengen  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $E$  im  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  gegeben, so sagen wir, dass  $E_k$  **lokal gegen  $E$  in  $\Omega$  konvergiert** genau dann, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(E_k \triangle E) \cap A| = 0 \quad \text{für alle } A \subseteq \Omega \text{ beschränkt,}$$

wobei  $|\cdot|$  das Lebesgue-Maß und  $E_k \triangle E := (E_k \setminus E) \cup (E \setminus E_k) = (E_k \cup E) \setminus (E_k \cap E)$  die symmetrische Differenz der Mengen  $E_k$  und  $E$  bezeichnet. Grundlegend für weitere Ergebnisse ist die

**Unterhalbstetigkeit des  $\alpha$ -Perimeters:**  $E_k$  konvergiere lokal gegen  $E$  in  $\Omega$ , dann gilt:

$$\mathcal{P}_\alpha(E; A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\alpha(E_k; A) \quad \text{für alle } A \subseteq \Omega \text{ offen.}$$

**Definition.** Sei  $E$  eine  $\alpha$ -Caccioppoli-Menge in  $\Omega$ . Wir nennen  $E$  einen **lokalen  $\mathcal{P}_\alpha$ -Minimierer in  $\Omega$**  genau dann, wenn für alle beschränkten offenen Mengen  $A \subseteq \Omega$  gilt:

$$\mathcal{P}_\alpha(E; A) \leq \mathcal{P}_\alpha(F; A) \quad \text{für alle } \alpha\text{-Caccioppoli-Mengen } F \text{ in } \Omega \text{ mit } F \triangle E \subset\subset A.$$

### Bemerkung 1:

Im Caccioppoli-Kalkül folgt die Existenz eines Minimierers sofort aus der Unterhalbstetigkeit.

### Bemerkung 2:

DIERKES verwendete die Bezeichnung  $\alpha$ -Perimeter nicht direkt und bezeichnete lokale  $\mathcal{P}_\alpha$ -Minimierer als Mengen mit einem *orientierten Rand kleinster  $\alpha$ -Energie*.

Bevor wir lokale  $\mathcal{P}_\alpha$ -minimierende Kegel angeben, betrachten wir eine glatte Situation:

## 1.4 Der klassische Fall

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$  eine orientierte Lipschitz-Hyperfläche mit  $\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$ . Wir betrachten das durch eine Funktion  $a \in C^0(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  gewichtete Area-Funktional

$$\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) := \int_{\mathcal{M} \cap \mathcal{K}} a(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x).$$

Dann heißt  $\mathcal{M}$  ( lokaler ) **Minimierer** des gewichteten Area-Funktional in  $\Omega$ , falls

$$\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \overline{\mathcal{U}}) \leq \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{M}} \cap \overline{\mathcal{U}}),$$

für jede orientierte Lipschitz-Hyperfläche  $\tilde{\mathcal{M}}$ , die außerhalb einer offenen Menge  $\mathcal{U} \subset\subset \Omega$  mit  $\mathcal{M}$  übereinstimmt und  $(\mathcal{M} \cup \tilde{\mathcal{M}}) \cap \overline{\mathcal{U}} = \partial\mathcal{O}$  für eine offene Menge  $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$  erfüllt.

#### 1.4.1. Eine notwendige Bedingung

Sind  $a$  und  $\mathcal{M}$  zusätzlich  $C^1$ , dann erhalten wir als eine *notwendige Bedingung* für die Minimalität, dass die erste Variation des gewichteten Area-Funktional verschwinden muss, das heißt,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}(\Phi_\varepsilon(\mathcal{M} \cap \overline{\mathcal{U}})) \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (1.1)$$

wobei  $\mathcal{U}$  eine beliebige relativ kompakte offene Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $\Phi_\varepsilon$  eine beliebige ein-parametrische Familie von Diffeomorphismen  $\Omega \rightarrow \Omega$  mit

- $\Phi_\varepsilon(x) = \Phi(\varepsilon, x)$  ist eine  $C^2$ -Abbildung:  $(-1, 1) \times \Omega \rightarrow \Omega$ ,
- $\Phi_0(x) = x$  für alle  $x \in \Omega$ ,
- $\Phi_\varepsilon(x) = x$  für alle  $\varepsilon \in (-1, 1)$  und alle  $x \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{U}}$ .

Gilt hingegen (1.1) für jede solche ein-parametrische Familie von Diffeomorphismen und jede offene Menge  $\mathcal{U} \subset\subset \Omega$ , so heißt  $\mathcal{M}$  **kritischer Punkt** des gewichteten Area-Funktional in  $\Omega$  ( kurz:  **$\mathcal{A}$ -kritisch** in  $\Omega$  ).

#### 1.4.2. Eine hinreichende Bedingung

Ist  $\mathcal{M}$  zusätzlich  $C^2$ , so ist eine *hinreichende Bedingung* für die Minimalität die Existenz einer ( gewichteten ) **Kalibrierung für  $\mathcal{M}$** , das heißt, eines Vektorfeldes  $\xi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  mit

- (i)  $|\xi(x)| \leq a(x)$  für alle  $x \in \Omega$ ,
- (ii)  $\xi(x) = a(x) \cdot n_{\mathcal{M}}(x)$  für alle  $x \in \mathcal{M} \cap \Omega$ ,
- (iii)  $\operatorname{div} \xi(x) = 0$  für alle  $x \in \Omega$ ,

wobei  $n_{\mathcal{M}}$  als Einheitsnormalenvektorfeld  $\mathcal{M}$  orientiert, denn mit dem Divergenzsatz erhalten wir zunächst

$$\int_{\mathcal{M} \cap \overline{\mathcal{U}}} \langle \xi, n_{\mathcal{M}} \rangle d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\tilde{\mathcal{M}} \cap \overline{\mathcal{U}}} \langle \xi, -n_{\tilde{\mathcal{M}}} \rangle d\mathcal{H}^{N-1} = \pm \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div} \xi dx = 0,$$

wobei das letzte Vorzeichen von der Richtung der Normalen abhängt.

Schließlich folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \bar{\mathcal{U}}) &= \int_{\mathcal{M} \cap \bar{\mathcal{U}}} a \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\mathcal{M} \cap \bar{\mathcal{U}}} \langle \xi, n_{\mathcal{M}} \rangle \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\tilde{\mathcal{M}} \cap \bar{\mathcal{U}}} \langle \xi, n_{\tilde{\mathcal{M}}} \rangle \, d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq \int_{\tilde{\mathcal{M}} \cap \bar{\mathcal{U}}} a \, d\mathcal{H}^{N-1} = \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{M}} \cap \bar{\mathcal{U}}).\end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass wir – im Gegensatz zu [DAVINI] – bei unserer Definition der Kalibrierung die Gewichtung durch die Funktion  $a$  wieder beim Vektorfeld vornehmen.

### 1.4.3. Über kritische Blätterungen

Die Schwierigkeit besteht nun in der Angabe einer geeigneten Kalibrierung. Hierbei hilft eine **Blätterung** von  $\Omega$ , nämlich eine ein-parametrische Familie  $(\mathcal{M}_{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{R}}$  von paarweise disjunkten, orientierten  $C^2$ -Hyperflächen, deren Vereinigung  $\Omega$  ergibt. Sind ferner diese Hyperflächen alle  $\mathcal{A}$ -kritisch, so folgt mit der Wahl

$$\xi(x) := a(x) \cdot n_{\mathcal{M}_{\lambda}}(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

sofort

$$\operatorname{div} \xi \equiv 0 \quad \text{in } \Omega,$$

siehe Proposition 2. Dieses  $\xi$  wäre somit eine Kalibrierung für jedes  $\mathcal{M}_{\lambda}$ , und letztere folglich alle Minimierer. Eine Blätterung, welche aus  $\mathcal{A}$ -kritischen Hyperflächen besteht, nennen wir ebenfalls  **$\mathcal{A}$ -kritisch**.

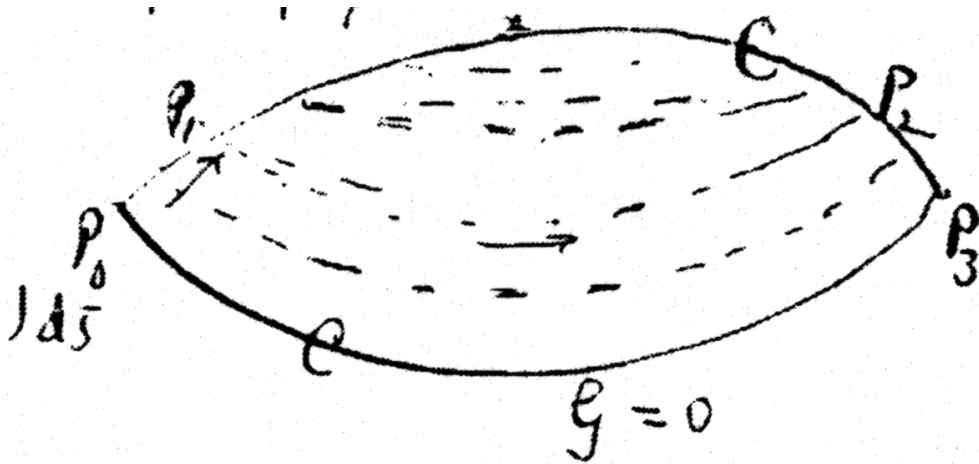


Abb. 1: Angedeutet ist eine kritische Blätterung. Diese Zeichnung stammt aus John FIELDS<sup>3</sup> Mitschrift der SCHWARZ'schen Vorlesung zur Variationsrechnung im Wintersemester 1898. In der Mitschrift heißt es: „A third case leading to same Schlussergebnisse but starting out ganz anders ist [...]. We voraussetzen here that we know a Schaar of Curven satisfying Diff. eq.  $G = 0$ ; and further not intersecting one another in Gebiet between  $C$  and  $\bar{C}$  gezeichnet as in fig., so that through each pt. of Gebiet one and only one Curve of Schaar passes.“<sup>4</sup> Dabei stellt die Gleichung  $G = 0$  „eine Differentialgleichung zweiter Ordnung dar, der die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer jeden Curve genügen müssen, für die das Integral [...] ein Minimum besitzen kann“, vgl. [WEIERSTRAB, S. 107].

<sup>3</sup>Initiator der Fields-Medaille

<sup>4</sup>Sowohl die Zeichnung, als auch das Zitat haben wir aus [THIELE, sec. 3.7.1.3] entnommen.

Die folgende Proposition gibt zunächst eine Charakterisierung für  $\mathcal{C}$ -kritische Hyperflächen an:

**Proposition 1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen,  $a \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$  eine orientierte  $C^2$ -Hyperfläche, wobei  $\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $\partial\mathcal{M} \cap \Omega = \emptyset$  und  $\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$ .

Wir erhalten:

$\mathcal{M}$  ist genau dann  $\mathcal{C}$ -kritisch in  $\Omega$ , wenn sein mittlerer Krümmungsvektor  $\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}$  der Beziehung

$$a(x) \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x) = (\nabla a(x))^\perp \quad \text{für alle } x \in \mathcal{M} \cap \Omega \quad (1.2)$$

genügt, wobei  $(\cdot)^\perp$  den Normalenanteil im Punkt  $x \in \mathcal{M}$  bezeichnet, das heißt, die Projektion auf den Normalenraum  $N_x\mathcal{M}$ .

**Bemerkung 1:**

Für  $a \equiv 1$  ist es die Charakterisierung minimaler Hyperflächen.

Der Spezialfall für  $a(x) = (x_{m+1})^\alpha$  entspricht der Aussage von DIERKES et al. [2, sec. 3.2 prop. 4].

**Bemerkung 2:**

Wir haben uns für die Darstellung über den mittleren Krümmungsvektor aus folgenden Gründen entschieden:

1. Das Vorzeichen der mittleren Krümmung hängt von der Wahl der Normalenrichtung ab. Hin- gegen ist die Definition des mittleren Krümmungsvektors eindeutig.
2. Der Beweis der Proposition zeigt, dass seine Aussage auch für Untermannigfaltigkeiten belie- biger Kodimension gültig bleibt.

Ferner sei bemerkt, dass wir in unseren Betrachtungen die mittlere Krümmung beziehungsweise den mittleren Krümmungsvektor ohne den Faktor  $\frac{1}{\dim \mathcal{M}}$  verstehen.

*Beweis von Proposition 1.* Die Area-Formel liefert

$$\mathcal{C}(\Phi_\varepsilon(\mathcal{M} \cap \bar{\mathcal{U}})) = \int_{\mathcal{M} \cap \bar{\mathcal{U}}} a(\Phi_\varepsilon(x)) \cdot J_{\Psi_\varepsilon}(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x),$$

wobei  $J_{\Psi_\varepsilon}$  die Jacobi-Determinante von  $\Psi_\varepsilon := \Phi_\varepsilon|_{\mathcal{M} \cap \Omega}$  bezeichnet.

Die Bestimmung der ersten Variation reduziert sich somit auf die Differentiation des Integranden:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (a(\Phi_\varepsilon(x)) \cdot J_{\Psi_\varepsilon}(x)) = \langle \nabla a(\Phi_\varepsilon(x)), \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\varepsilon, x) \rangle \cdot J_{\Psi_\varepsilon}(x) + a(\Phi_\varepsilon(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J_{\Psi_\varepsilon}(x).$$

Die betrachtete ein-parametrische Familie von Diffeomorphismen  $\Phi_\varepsilon$  induziert das Variationsvektor- feld

$$\mathfrak{X}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\varepsilon, x) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Dieses hat kompakten Träger in  $\bar{\mathcal{U}}$ .

Ferner liefert direktes Nachrechnen<sup>5</sup>

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J_{\Psi_\varepsilon}(x) \right|_{\varepsilon=0} = \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X}(x),$$

sodass wir erhalten

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} ((a \circ \Phi_\varepsilon) \cdot J_{\Psi_\varepsilon}) \right|_{\varepsilon=0} = \langle \nabla a, \mathfrak{X} \rangle + a \cdot \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X} = \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(a \cdot \mathfrak{X}) + \langle (\nabla a)^\perp, \mathfrak{X} \rangle.$$

Mit der betrachteten Familie von Diffeomorphismen  $\Phi_\varepsilon$  heißt

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}(\Phi_\varepsilon(\mathcal{M} \cap \overline{\mathcal{U}})) \right|_{\varepsilon=0} =: \delta \mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathfrak{X})$$

die erste Variation des gewichteten Area-Funktionalen bezüglich des Variationsvektorfeldes  $\mathfrak{X}$ .

Da nun  $\mathfrak{X} \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  ist, erhalten wir insgesamt

$$\delta \mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathfrak{X}) = \int_{\mathcal{M}} \langle (\nabla a)^\perp, \mathfrak{X} \rangle + \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(a \cdot \mathfrak{X}) \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

und mit dem Divergenzsatz

$$\delta \mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathfrak{X}) = \int_{\mathcal{M}} \langle (\nabla a)^\perp - a \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{X} \rangle \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

sodass die Behauptung mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt.  $\square$

Mit obiger Charakterisierung  $\mathcal{A}$ -kritischer Hyperflächen erhalten wir einen überschaubaren Beweis dafür, dass eine  $\mathcal{A}$ -kritische Blätterung eine geeignete Kalibrierung liefert:

**Proposition 2.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen,  $a \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  und  $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  eine  $\mathcal{A}$ -kritische Blätterung von  $\Omega$ , wobei  $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathbb{R}^N$  orientierte  $C^2$ -Hyperflächen sind, mit  $\mathcal{M}_\lambda \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $\partial \mathcal{M}_\lambda \cap \Omega = \emptyset$  und  $\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{M}_\lambda \cap \mathcal{K}) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$ . Dann gilt

$$\operatorname{div}(a(x) \cdot n_{\mathcal{M}_\lambda}(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

*Beweis.* Die mittlere Krümmung von  $\mathcal{M}_\lambda$  im Punkt  $x \in \mathcal{M}_\lambda$  ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}_\lambda}(x) = \langle \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}_\lambda}(x), n_{\mathcal{M}_\lambda}(x) \rangle = -\operatorname{div}_{\mathcal{M}_\lambda}(n_{\mathcal{M}_\lambda}(x)) = -\operatorname{div}(n_{\mathcal{M}_\lambda}(x)),$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem Vorliegen einer Blätterung und der Normierung von  $n_{\mathcal{M}_\lambda}$  folgt.<sup>6</sup>

Mit Proposition 1 folgt die Behauptung:

$$0 = \langle \nabla a, n_{\mathcal{M}_\lambda} \rangle - a \cdot \mathcal{H}_{\mathcal{M}_\lambda} = \langle \nabla a, n_{\mathcal{M}_\lambda} \rangle + a \cdot \operatorname{div}(n_{\mathcal{M}_\lambda}) = \operatorname{div}(a \cdot n_{\mathcal{M}_\lambda}).$$

$\square$

<sup>5</sup>vgl. z.B. DIERKES et al. [2, sec. 3.2]

<sup>6</sup>vgl. z.B. DIERKES et al. [1, sec. 4.3]

## 1.5 Eine kurze Bemerkung zur Geschichte der Feldtheorie

Die Idee der Zuhilfenahme einer Kalibrierung kann auch auf Minimalitätsuntersuchungen von Untermannigfaltigkeiten beliebiger Kodimension und sogar allgemeiner von Strömen übertragen werden, vgl. Herbert FEDERER's Differentialformenargument [5.4.19].

Bereits Karl WEIERSTRAß benutzte Blätterungen, welche aus kritischen Kurven bestanden, um eine hinreichende Bedingung für eine minimierende Kurve zu erhalten. Dabei betrachtete er zunächst *zentrale* Felder, das heißt, Extremalenbündel aus einem gemeinsamen Startpunkt. Eine hinreichende Bedingung für die Minimalität erhielt WEIERSTRAß durch die Forderung der Positivität der entsprechenden Exseßfunktion auf den Extremalen. In seinen späteren Vorlesungen zur Variationsrechnung ab dem Sommersemester 1879 erzeugte er aber bereits *allgemeinere* Felder, indem er den Startpunkt etwas vorzog. Sein Schüler Hermann Amandus SCHWARZ konstruierte in seinen eigenen Vorlesungen disjunkte Extremalenscharen zu konkreten Problemen. Insbesondere übertrug er das WEIERSTRAß'sche Konzept von Kurven auf Flächen, genauer gesagt auf Minimalflächen, vgl. [SCHWARZ].

Für die historische Entwicklung der Feldtheorie verweisen wir ferner auf die Habilitationsschrift von Rüdiger THIELE. In seinen Betrachtungen bezieht [THIELE] auch unveröffentlichte Quellen ein, so zum Beispiel ungedruckte Briefwechsel zwischen WEIERSTRAß und SCHWARZ.

Es sei bemerkt, dass SCHWARZ sich auch von den Untersuchungen einer Schar von Katenoiden von LORENZ LINDELÖF<sup>7</sup> inspirieren ließ. Allerdings kritisierte WEIERSTRAß, dass LINDELÖF nur rotations-symmetrische Variationen betrachtete. SCHWARZ konnte diesen Kritikpunkt beseitigen, indem er eine Formel angab, die „diejenige Variation, bei welcher sich die Fläche von einer Rotationsfläche entfernt, sogleich – unter Verkleinerung des Flächeninhalts – durch eine solche Variation ersetzt [...], welche wieder eine Rotationsfläche ergibt“, vgl. SCHWARZ Brief an WEIERSTRAß vom 27. Juni 1887, hier zitiert nach [THIELE, sec. 3.7.2]. SCHWARZ schreibt weiter, dass, „wenn dies bekannt ist, [...] der Einwand, daß Herr Lindelöf nur eine specielle Variation in Betracht gezogen hat, in den Hintergrund gegenüber der von ihm und zwar von ihm zuerst vorgenommen Untersuchung einer *Schaar* von Minimalflächen mit einer einhüllenden Fläche [tritt].“

LINDELÖF's Untersuchungen findet man zum Beispiel in seinem 1861 erschienenen Buch »*Leçons de calcul de variation*«, ein „ganz ausgezeichnete[s Buch] für denjenigen, der [es] mit Kritik zu lesen versteht“, vgl. [CARATHÉODORY, p. 397].

Einen kurzen Überblick über [SCHWARZ] Festschrift gab DIERKES in [3, Bem. 2.7].

Für eine moderne Ausarbeitung der SCHWARZ'schen Ideen zur WEIERSTRAß'schen Feldtheorie verweisen wir ferner auf die Monographie von Ulrich DIERKES, Stefan HILDEBRANDT und Friedrich SAUVIGNY »*Minimal surfaces*«. Genauer gesagt wird dort der Fall mit  $a \equiv 1$  und  $N = 3$  besprochen.

---

<sup>7</sup>Vater von Ernst LINDELÖF



Dabei wird in Abschnitt 2.7 zunächst die mittlere Krümmung auf den Niveaulächen einer Hilfsfunktion mit nicht-verschwindendem Gradienten bestimmt. Sind solche Niveaulächen zudem Minimalflächen, so folgt aus einer solchen Darstellung der mittleren Krümmung sofort ein Spezialfall obiger Proposition 2, nämlich für den Fall  $a \equiv 1$  und  $N = 3$ . Daraufhin wird in Abschnitt 2.8 gezeigt, dass das Einbetten einer Minimalfläche in eine Blätterung durch Minimalflächen hinreichend dafür ist, dass eine jede solche Minimalfläche auch ein lokaler Minimierer des Area-Funktionalis ist. Schließlich ist eine Übertragung auf minimale Hyperflächen beliebiger Dimension im zweiten Band dieser Reihe »Regularity of minimal surfaces« in Abschnitt 4.3 Theorem 1 zu finden.

Diese Ideen sind jedoch theoretischer Natur. Wir werden explizit unter Ausnutzung ähnlicher Vorgehensweisen die minimierende Eigenschaft gewisser Kegel nachweisen:

## 1.6 Ein erster Ansatz

Im Speziellen interessieren wir uns für den Fall

$$a(x) = (x_{m+1})^\alpha,$$

wobei wir hierbei im oberen Halbraum  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  arbeiten. Wir kehren zu unseren ursprünglichen Bezeichnungen zurück und bezeichnen im Folgenden mit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine offene Menge (im Sinne der Teilraumtopologie).

Betrachten wir erneut die Legitimierung über die Zuhilfenahme von Kalibrierungen (vgl. S. 12), so stellen wir fest, dass auch ein Vektorfeld mit einer *nicht-positiven* Divergenz ausreichen würde.

Auf Mengen bezogen ergänzen wir noch die folgende

**Definition.** Sei  $E$  eine  $\alpha$ -Caccioppoli-Menge in  $\Omega$ . Wir nennen  $E$  einen **lokalen  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in  $\Omega$**  genau dann, wenn für alle beschränkten offenen Mengen  $A \subseteq \Omega$  gilt:

$$\mathcal{P}_\alpha(E; A) \leq \mathcal{P}_\alpha(F; A) \quad \text{für alle } \alpha\text{-Caccioppoli-Mengen } F \text{ in } \Omega \text{ mit } F \subseteq E \text{ und } E \setminus F \subset\subset A.$$

Dabei haben wir die Idee – nur innere Deformationen – zu betrachten aus der gemeinsamen Arbeit von Guido DE PHILIPPIS und Emanuele PAOLINI aufgegriffen. Sie behandeln den Perimeter, jedoch lassen sich ihre Argumente auch direkt auf unseren  $\alpha$ -Perimeter übertragen, sodass wir wieder nur die nötigen Resultate auflisten, und für die Beweise auf deren Arbeit verweisen:

Den Bezug zur Minimalität liefert

**Proposition 3.**  $E$  ist ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Minimierer in  $\Omega$  genau dann, wenn sowohl  $E$  als auch  $\Omega \setminus E$  ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in  $\Omega$  ist.

Mit Hilfe der Unterhalbstetigkeit des  $\alpha$ -Perimeters folgt für konvergente lokale  $\mathcal{P}_\alpha$ -minimierende  $\alpha$ -Caccioppoli-Mengen:

**Proposition 4.** Seien  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $E$   $\alpha$ -Caccioppoli-Mengen in  $\Omega$ , wobei  $E_k$  lokal gegen  $E$  in  $\Omega$  konvergiert mit  $E_k \subseteq E$ . Falls alle  $E_k$  lokale  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in  $\Omega$  sind, so ist auch  $E$  ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in  $\Omega$ .

Schließlich garantiert die Existenz einer sogenannten Sub-Kalibrierung die Sub-Minimalität:

**Definition.** Sei  $E \subseteq \Omega$  eine  $\alpha$ -Caccioppoli-Menge in  $\Omega$  mit  $\partial E \cap \Omega \in C^2$ . Wir nennen ein Vektorfeld  $\xi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{m+1})$  eine  **$\alpha$ -Sub-Kalibrierung von  $E$  in  $\Omega$** , wenn

- (i)  $|\xi(x)| \leq (x_{m+1})^\alpha$  für alle  $x \in \Omega$ ,
- (ii)  $\xi(x) = (x_{m+1})^\alpha \cdot \nu_E(x)$  für alle  $x \in \partial E \cap \Omega$ ,
- (iii)  $\operatorname{div} \xi(x) \leq 0$  für alle  $x \in \Omega$ ,

wobei  $\nu_E$  das äußere Einheitsnormalenvektorfeld an  $\partial E$  bezeichnet.

**Proposition 5.** Ist  $\xi$  eine  $\alpha$ -Sub-Kalibrierung von  $E$  in  $\mathcal{O} \subseteq \Omega$  offen, dann ist  $E$  ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in ganz  $\Omega$ .

Zu beachten ist, dass wir lediglich ein Sub-Kalibrierung auf einer Teilmenge von  $\Omega$ , die  $E$  enthält, fordern. Der entsprechende Beweis aus [DE PHILIPPIS & PAOLINI] ist aber übertragbar, da ausschließlich innere Deformationen betrachtet werden.

Ferner zeigt die folgende neue Proposition, dass es ausreicht die Sub-Minimalität des Kegels  $\mathcal{C}_m^\alpha$  außerhalb der Menge  $\{x_{m+1} = 0 \vee \underline{x} = 0\}$  nachzuweisen um seine Sub-Minimalität im ganzen Halbraum  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  zu erhalten:

**Proposition 6.** Ist  $\mathcal{C}_m^\alpha$  ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \{\underline{x} = 0\}$ , so ist  $\mathcal{C}_m^\alpha$  auch ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in ganz  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

*Beweis.* Da  $\mathcal{C}_m^\alpha$  einen Lipschitz-Rand besitzt, ist  $\mathcal{C}_m^\alpha$  eine  $\alpha$ -Caccioppoli-Menge in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  und wir erhalten für eine beschränkte offene Menge  $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha(\mathcal{C}_m^\alpha; \tilde{A}) &= \mathcal{P}_\alpha(\mathcal{C}_m^\alpha; \tilde{A} \setminus \{0\}) = \int_{\partial \mathcal{C}_m^\alpha \cap \tilde{A} \setminus \{0\}} (x_{m+1})^\alpha d\mathcal{H}^m(x) = \\ &= \int_{\partial \mathcal{C}_m^\alpha \cap \tilde{A} \setminus \{x_{m+1}=0 \vee \underline{x}=0\}} (x_{m+1})^\alpha d\mathcal{H}^m(x) = \mathcal{P}_\alpha(\mathcal{C}_m^\alpha; \tilde{A} \setminus \{x_{m+1}=0 \vee \underline{x}=0\}) \\ &\leq \mathcal{P}_\alpha(F; \tilde{A} \setminus \{x_{m+1}=0 \vee \underline{x}=0\}) \leq \mathcal{P}_\alpha(F; \tilde{A}), \end{aligned}$$

für alle  $\alpha$ -Caccioppoli-Mengen  $F \subseteq \mathcal{C}_m^\alpha$  mit  $\mathcal{C}_m^\alpha \setminus F \subset \subset \tilde{A} \setminus \{x_{m+1}=0 \vee \underline{x}=0\}$  nach Voraussetzung.

Sei nun  $\tilde{F} \subseteq \mathcal{C}_m^\alpha$  eine  $\alpha$ -Caccioppoli-Menge mit  $\mathcal{C}_m^\alpha \setminus \tilde{F} \subset \subset \tilde{A}$ . Für  $\varepsilon > 0$  betrachten wir die Mengen

$$\tilde{F}_\varepsilon := \tilde{F} \cup (\mathcal{C}_m^\alpha \cap \{x_{m+1} < \varepsilon \vee |\underline{x}| < \varepsilon\}).$$

Dann ist  $\tilde{F}_\varepsilon$  eine  $\alpha$ -Caccioppoli-Menge und

$$\mathcal{C}_m^\alpha \setminus \tilde{F}_\varepsilon = (\mathcal{C}_m^\alpha \setminus \tilde{F}) \cap (\mathcal{C}_m^\alpha \setminus \{x_{m+1} < \varepsilon \vee |\underline{x}| < \varepsilon\}) \subset \subset \tilde{A} \setminus \{x_{m+1} = 0 \vee \underline{x} = 0\}.$$

Nach den Vorüberlegungen erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha(\mathcal{C}_m^\alpha; \tilde{A}) &\leq \mathcal{P}_\alpha(\tilde{F}_\varepsilon; \tilde{A}) \leq \mathcal{P}_\alpha(\tilde{F}; \tilde{A}) + \mathcal{P}_\alpha(\mathcal{C}_m^\alpha \cap \{x_{m+1} < \varepsilon \vee |\underline{x}| < \varepsilon\}; \tilde{A}) \\ &\leq \mathcal{P}_\alpha(\tilde{F}; \tilde{A}) + c_1(m) \cdot \left\{ \sqrt{1 + \frac{\alpha}{m-1}} \int_0^{\max\{1, \sqrt{\frac{m-1}{\alpha}}\}\varepsilon} u^{m+\alpha-1} du + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^R \varepsilon^\alpha u^{m-1} du + \int_0^R \varepsilon^{m-1} (x_{m+1})^\alpha dx_{m+1} \right\} \\ &\leq \mathcal{P}_\alpha(\tilde{F}; \tilde{A}) + c_2(m, \alpha, \tilde{A}) \cdot \{\varepsilon^{m+\alpha} + \varepsilon^\alpha + \varepsilon^{m-1}\} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{P}_\alpha(\tilde{F}; \tilde{A}) \end{aligned}$$

wobei  $R := \sup_{x \in \tilde{A}} |x| < \infty$ ,  $c_1$  und  $c_2$  Konstanten sind, die nur von  $m$ ,  $\alpha$  und  $\tilde{A}$  abhängen.

Insgesamt haben wir also, dass  $\mathcal{C}_m^\alpha$  ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in ganz  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist.  $\square$

Ferner ist das Ziel dieses Abschnittes einen ersten Beweis unseres Satzes 1 zu geben. Jedoch erhalten wir hierbei noch *nicht* unsere bestmöglichen Schranken, von denen am Anfang die Rede war. Allerdings können wir hier *explizite* Sub-Kalibrierungen angeben. Ferner bekommen wir auch *explizite* Darstellungen möglicher Schranken.

Die Zuhilfenahme von *Sub*-Kalibrierungen bei Minimalitätsuntersuchungen im Falle der  $\alpha$ -Energie ist neu. Diese Untersuchungen erweisen sich aber als recht übersichtlich und vermitteln eine Idee für die spätere ausführliche Vorgehensweise. Dabei münden die Betrachtungen in Funktionsuntersuchungen von speziellen Polynomen.

Im Folgenden setzen wir

$$\mathbf{Q}_{m,\alpha}(y) := (m-1)^4 y^3 - 3(m-1)^2 \alpha y^2 - 3(m-1) \alpha^2 y + \alpha^4.$$

**Lemma 1.** Sei  $m \in \{2, 3, \dots\}$ . Dann gilt für alle  $\alpha \geq \frac{3m + 2m^{3/2} - 1}{(m-1)^2}$ , dass

$$\mathbf{Q}_{m,\alpha}(y) \geq 0 \quad \text{für alle } y \geq 0.$$

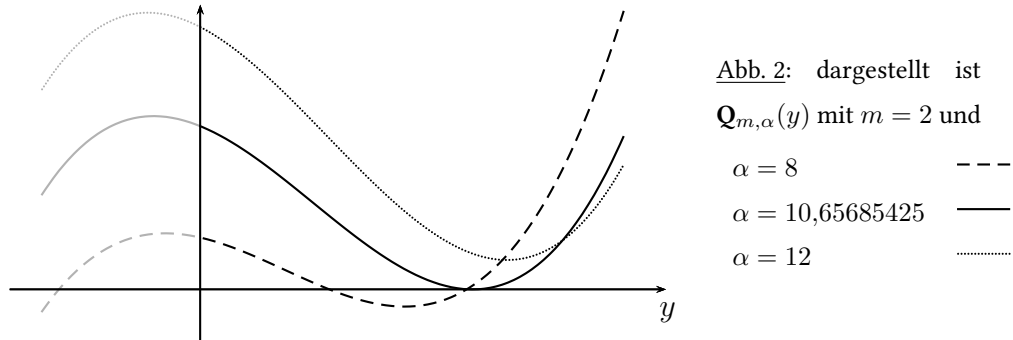
*Beweis.*  $\mathbf{Q}_{m,\alpha}(-y)$  hat in seiner Koeffizientenfolge:

$$-(m-1)^4, \quad -3(m-1)^2 \alpha, \quad 3(m-1) \alpha^2, \quad \alpha^4,$$

für alle zulässigen  $m \geq 2$  und  $\alpha > 0$  immer genau einen Vorzeichenwechsel, sodass nach der kartesischen Zeichenregel<sup>8</sup>  $\mathbf{Q}_{m,\alpha}(\cdot)$  in  $(-\infty, 0)$  immer genau eine Nullstelle besitzt. Mit anderen

<sup>8</sup>vgl. z.B. [DICKSON, ch. VI, § 67]

Worten hat  $\mathbf{Q}_{m,\alpha}(\cdot)$  entweder keine, eine doppelte oder zwei verschiedene positive Nullstellen, in Abhängigkeit von den Werten der Koeffizienten.



Die Anzahl der reellen Wurzeln der kubischen Gleichung  $\mathbf{Q}_{m,\alpha}(y) = 0$  kann auf das Vorzeichen ihrer Diskriminante<sup>9</sup>

$$\vartheta = 27(m-1)^6 \alpha^6 \{(m-1)^2 \alpha^2 - (6m-2)\alpha + 1 - 4m\}$$

zurückgeführt werden.

Gilt nämlich<sup>10</sup>

i)  $\vartheta > 0$ , so hat  $\mathbf{Q}_{m,\alpha}(y) = 0$  eine einfache reelle Lösung.

$\Rightarrow \mathbf{Q}_{m,\alpha}(\cdot)$  hat keine positive Nullstelle.

ii)  $\vartheta = 0$ , so hat  $\mathbf{Q}_{m,\alpha}(y) = 0$  eine einfache und eine doppelte reelle Lösung.

$\Rightarrow \mathbf{Q}_{m,\alpha}(\cdot)$  hat eine doppelte positive Nullstelle.

iii)  $\vartheta < 0$ , so hat  $\mathbf{Q}_{m,\alpha}(y) = 0$  drei verschiedene reelle Lösungen.

$\Rightarrow \mathbf{Q}_{m,\alpha}(\cdot)$  hat zwei verschiedene positive Nullstellen.

Mit anderen Worten folgt die Behauptung für solche Werte  $m$  und  $\alpha$ , für die  $\vartheta \geq 0$  ist.

Nach obiger Darstellung hat aber  $\vartheta$  das gleiche Vorzeichen wie das quadratische Polynom

$$\mathbf{q}_m(\alpha) := (m-1)^2 \alpha^2 - (6m-2)\alpha + 1 - 4m,$$

dessen positive Nullstelle

$$\alpha = \frac{3m + 2m^{3/2} - 1}{(m-1)^2}$$

ist. □

<sup>9</sup>Unter der Diskriminante einer kubischen Gleichung  $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ , mit  $a \neq 0$ , verstehen wir den Ausdruck

$$27a^2d^2 + 4ac^3 - b^2c^2 + 4b^3d - 18abcd.$$

<sup>10</sup>vgl. z.B. [BRONSTEIN & SEMENDJAJEW, sec. 2.4.2.3]

Kommen wir nun zu einem ersten

*Beweis von Satz 1 (explizite Schranken).* Auf  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  betrachten wir die Funktion

$$F_{m,\alpha}(x) := \frac{1}{4} \{ \alpha^2 |\underline{x}|^4 - (m-1)^2 (x_{m+1})^4 \}.$$

Dann ist

$$\nabla F_{m,\alpha}(x) = (\alpha^2 |\underline{x}|^2 \underline{x}, -(m-1)^2 (x_{m+1})^3).$$

Ferner gilt auf  $\{ |\nabla F_{m,\alpha}| \neq 0 \}$ :

$$\nabla_{\underline{x}} \frac{|\underline{x}|^2}{|\nabla F_{m,\alpha}|} = \frac{2\underline{x}}{|\nabla F_{m,\alpha}|} - \frac{3\alpha^4 |\underline{x}|^6 \underline{x}}{|\nabla F_{m,\alpha}|^3}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \frac{1}{|\nabla F_{m,\alpha}|} = -\frac{3(m-1)^4 (x_{m+1})^5}{|\nabla F_{m,\alpha}|^3}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( -(x_{m+1})^\alpha \frac{\nabla F_{m,\alpha}}{|\nabla F_{m,\alpha}|} \right) &= -\langle \nabla_{\underline{x}}, \frac{(x_{m+1})^\alpha \alpha^2 |\underline{x}|^2 \underline{x}}{|\nabla F_{m,\alpha}|} \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \frac{(m-1)^2 (x_{m+1})^{\alpha+3}}{|\nabla F_{m,\alpha}|} \\ &= -m \frac{(x_{m+1})^\alpha \alpha^2 |\underline{x}|^2}{|\nabla F_{m,\alpha}|} - \langle \underline{x}, \nabla_{\underline{x}} \frac{(x_{m+1})^\alpha \alpha^2 |\underline{x}|^2}{|\nabla F_{m,\alpha}|} \rangle \\ &\quad + \frac{(m-1)^2 (\alpha+3) (x_{m+1})^{\alpha+2}}{|\nabla F_{m,\alpha}|} + (m-1)^2 (x_{m+1})^{\alpha+3} \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \frac{1}{|\nabla F_{m,\alpha}|} \\ &= |\nabla F_{m,\alpha}|^{-3} \{ -(m-1) \alpha^6 (x_{m+1})^\alpha |\underline{x}|^8 - (m-1)^4 (m+2) \alpha^2 (x_{m+1})^{\alpha+6} |\underline{x}|^2 \\ &\quad + (m-1)^2 (\alpha+3) \alpha^4 (x_{m+1})^{\alpha+2} |\underline{x}|^6 + (m-1)^6 \alpha (x_{m+1})^{\alpha+8} \} \\ &= -|\nabla F_{m,\alpha}|^{-3} (m-1) \alpha (x_{m+1})^\alpha |\underline{x}|^6 \mathbf{Q}_{m,\alpha} \left( \frac{(x_{m+1})^2}{|\underline{x}|^2} \right) \{ \alpha |\underline{x}|^2 - (m-1) (x_{m+1})^2 \}. \end{aligned}$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  betrachte nun die Mengen

$$E_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0} : F_{m,\alpha}(x) \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Da

$$F_{m,\alpha} \in C^2((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \{ \underline{x} = 0 \}) \setminus \mathcal{M}_m^\alpha), \quad \text{wobei } \mathcal{M}_m^\alpha = \partial \mathcal{C}_m^\alpha = \{ F_{m,\alpha} = 0 \} \text{ ist,}$$

sind die  $E_k$  alle  $\alpha$ -Caccioppoli-Mengen in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \{ \underline{x} = 0 \}$ . Diese konvergieren für  $k \rightarrow \infty$  lokal gegen  $\mathcal{C}_m^\alpha = \{ F_{m,\alpha} \geq 0 \}$  in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , genauer gesagt, haben wir

$$E_k \subset \mathcal{C}_m^\alpha$$

und  $\lim_{k \rightarrow \infty} |(\mathcal{C}_m^\alpha \setminus E_k) \cap A| = 0$  für alle beschränkten Teilmengen  $A \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Nach Lemma 1 gilt bei festem  $m \in \{2, 3, \dots\}$  für alle  $\alpha \geq \frac{3m + 2m^{3/2} - 1}{(m-1)^2}$ :

$$\mathbf{Q}_{m,\alpha} \left( \frac{(x_{m+1})^2}{|\underline{x}|^2} \right) \geq 0 \quad \text{für alle } \underline{x} \neq 0, x_{m+1} \geq 0,$$

sodass nach obiger Divergenzbestimmung das Vektorfeld

$$\xi_+(x) := -(x_{m+1})^\alpha \frac{\nabla F_{m,\alpha}(x)}{|\nabla F_{m,\alpha}(x)|}$$

eine  $\alpha$ -Sub-Kalibrierung für jedes  $E_k$  in  $\{0 < \sqrt{m-1} x_{m+1} < \sqrt{\alpha} |\underline{x}|\}$  ist.<sup>11</sup>

Proposition 5 liefert also, dass alle  $E_k$  lokale  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \{\underline{x} = 0\}$  sind. Dann erhalten wir mit Proposition 4, dass  $\mathcal{C}_m^\alpha$  ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \{\underline{x} = 0\}$  ist. Schließlich ist  $\mathcal{C}_m^\alpha$  nach Proposition 6 auch ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in ganz  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Angesichts der Charakterisierung  $\mathcal{P}_\alpha$ -minimierender Mengen aus Proposition 3 folgt die Behauptung des Satzes 1 für

$$m \in \{2, 3, \dots\} \quad \text{und} \quad \alpha \geq \frac{3m + 2m^{3/2} - 1}{(m-1)^2},$$

wenn wir noch zeigen, dass das Komplement  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathcal{C}_m^\alpha$  ebenfalls ein lokaler  $\mathcal{P}_\alpha$ -Sub-Minimierer in ganz  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist. Die Vorgehensweise ist dabei identisch, genauer gesagt, betrachten wir hierbei die Mengen

$$D_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0} : F_{m,\alpha}(x) \leq -\frac{1}{k} \right\}$$

und nehmen das Vektorfeld

$$\xi_-(x) := (x_{m+1})^\alpha \frac{\nabla F_{m,\alpha}(x)}{|\nabla F_{m,\alpha}(x)|}$$

auf  $\{F_{m,\alpha} < 0\}$  zu Hilfe. □

### Bemerkung 1:

Alle bisher präsentierten Rechnungen wurden per Hand durchgeführt.

### Bemerkung 2:

Als Schranken erhalten wir hier

$\alpha_2 \approx 10,656854249$	$\alpha_7 \approx 1,584458843$	$\alpha_{12} \approx 0,976350734$
$\alpha_3 \approx 4,598076211$	$\alpha_8 \approx 1,392955796$	$\alpha_{13} \approx 0,914891203$
$\alpha_4 = 3$	$\alpha_9 = 1,25$	$\vdots$
$\alpha_5 \approx 2,272542486$	$\alpha_{10} \approx 1,138833990$	$\alpha_{2017} \approx 0,046065274$
$\alpha_6 \approx 1,855755077$	$\alpha_{11} \approx 1,049657454$	$\vdots$

<sup>11</sup>Das indizierte Pluszeichen weist darauf hin, dass wir ein Vektorfeld im Bereich  $\{F_{m,\alpha} > 0\}$  betrachten. Dieses muss am Rand der Mengen  $E_k$  wie deren *äußeres* Normalenfeld orientiert sein!

Diese Schranken verbessern DIERKES Resultate aus [2] für  $m = 6$  und für  $m \geq 12$  (hier sind die Schranken kleiner als 1), sind aber noch nicht unsere bestmöglichen, vgl. S. 9. Insbesondere ist

$$\frac{3m + 2m^{3/2} - 1}{(m - 1)^2} > \frac{12}{m} \quad \text{für } m \geq 14,$$

wobei  $\frac{12}{m}$  eine obere Schranke für unsere bestmöglichen  $\alpha_m$ 's ist, vgl. Abschnitt 1.9.

**Bemerkung 3:**

Weitere Verbesserungen können durch Modifizierung der Ausgangsfunktion erzielt werden. Unser Beweis zeigt, dass wir obige Argumentation anwenden können, wenn eine solche Funktion  $F$  die folgenden drei Eigenschaften aufweist:

1.  $F \in C^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \{\underline{x} = 0\}) \setminus \mathcal{M}_m^\alpha \cap C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0})$
2.  $\{F \geq 0\} = \mathcal{C}_m^\alpha, \quad \{F = 0\} = \partial \mathcal{C}_m^\alpha = \mathcal{M}_m^\alpha$
3.  $\operatorname{div} \left( -(x_{m+1})^\alpha \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) \leq 0 \quad \text{in } \{0 < \sqrt{m-1} x_{m+1} < \sqrt{\alpha} |\underline{x}|\}$   
 $\operatorname{div} \left( (x_{m+1})^\alpha \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) \leq 0 \quad \text{in } \{0 < \sqrt{\alpha} |\underline{x}| < \sqrt{m-1} x_{m+1}\}$

Eine Möglichkeit wäre es die Funktion

$$\frac{1}{p} \{ \alpha^{p/2} |\underline{x}|^p - (m-1)^{p/2} (x_{m+1})^p \}$$

zu untersuchen und den Exponenten  $p$  zu optimieren, sodass wir kleinere Schranken erhalten. Exemplarische Berechnungen für  $m = 2, \dots, 8$  haben jedoch gezeigt, dass auch diese nicht besser sind als unsere bestmöglichen, sodass wir diesen Ansatz nicht weiter verfolgen.

**Bemerkung 4:**

Solche Untersuchungen den Perimeter betreffend sind nicht ganz neu. Tatsächlich haben sich DE PHILIPPIS und PAOLINI von den beiden Arbeiten [MASSARI & MIRANDA] und [DAVINI] inspirieren lassen. Dabei vereinfachten Umberto MASSARI und Mario MIRANDA den Beweis von BOMBIERI et al., indem sie statt des Simons-Kegels  $\mathcal{C}_7 \subset \mathbb{R}^8$  den Zylinder  $\mathcal{C}_7 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^9$  betrachteten und seine Minimalität mit Hilfe von Approximationen durch spezielle Sub- und Superlösungen der Minimalflächengleichung über  $\mathbb{R}^8$  zeigten.

Diese Methode nutzen auch Paul CONCUS und Mario MIRANDA in ihrer gemeinsamen Arbeit »MAC-SYMA and minimal surfaces« um die Minimalität der Lawson-Kegel<sup>12</sup> mit  $k + 4 < 5h$ , wobei  $(k, h) \neq (3, 5)$ , und mit  $h + 4 < 5k$ , wobei  $(k, h) \neq (5, 3)$ , nachzuweisen.

<sup>12</sup>Unter Lawson-Kegel verstehen wir Perimeter minimierende Kegel der Form

$$K_{k,h} := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h : (k-1)|y|^2 \leq (h-1)|x|^2 \},$$

das heißt, für  $k, h \geq 2$  und  $k + h \geq 9$  oder  $(k, h) \in \{(3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$ , vgl. [LAWSON] und [SIMÕES].

Mit dieser Bezeichnung ist  $\mathcal{C}_7 = \partial K_{4,4}$ .

Es sei bemerkt, dass sie statt von lokalen sub-minimierenden von  $M$ -konkaven Mengen sprechen, und Mengen, deren Komplement lokal sub-minimierend ist, entsprechend  $M$ -konvex nennen. Ihre algebraischen Umformungen führten sie mit Hilfe des Computeralgebrasystems MACSYMA aus.

Danilo BENARRÓS und Mario MIRANDA konnten mit Hilfe der Software *Mathematica* geeignetere Sub- und Superlösungen der Minimalflächengleichung angeben, sodass sie mit dieser Methode die Minimalität aller Lawson-Kegel erhielten, vgl. [BENARRÓS & MIRANDA].

Tatsächlich wird in der Arbeit [DE PHILIPPIS & PAOLINI] nur die Minimalität der symmetrischen Lawson-Kegel  $K_{k,k}$ ,  $k \geq 4$ , unter Zuhilfenahme von Sub-Kalibrierungen per Hand nachgerechnet. Diese Vorgehensweise kann aber auch noch für den Nachweis der Minimalität weiterer Lawson-Kegel benutzt werden, indem man eine geeignete Hilfsfunktion wählt. Analog zu unserem obigen ersten Beweis, erhält man unter Betrachtung der Hilfsfunktion  $F_{k,h}: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F_{k,h}(x, y) := \frac{1}{4} \{ (h-1)^2 |x|^4 - (k-1)^2 |y|^4 \}$$

auch die Minimalität aller bis auf zwölf Lawson-Kegel<sup>13</sup>, nämlich mit

$$(k, h) \notin \{(2, 7), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 11), (3, 5), (5, 3), (7, 2), (8, 2), (9, 2), (10, 2), (11, 2)\}.$$

Dabei haben wir bereits alle Rechenschritte oben aufgeführt, wobei die Einschränkungen genau den angegebenen Schranken aus Lemma 1 ( bei ganzzahligen Werten ) entsprechen.<sup>14</sup>

Unter Zuhilfenahme einer speziellen Parametrisierung und der daraus resultierenden Kalibrierungen hat [DAVINI] die Minimalität aller Lawson-Kegel per Hand nachgewiesen.

Letzteren Ansatz übertragen wir jetzt auf unser Problem den  $\alpha$ -Perimeter betreffend. Unser Ziel ist es zudem, die bestmöglichen Schranken, sodass diese Argumente anwendbar sind, zu erhalten. Wir haben bereits gesehen, dass solche Untersuchungen zu gewissen Polynomen führen. In unserem Fall greifen auch wir an einigen Stellen der Funktionsuntersuchungen auf ein Computeralgebrasystem zurück, genaueres dazu auf S. 35. Wir werden jetzt das entsprechende Polynom herleiten.

## 1.7 Reduzierung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung

Die Kegelmäntel  $\mathcal{M}_m^\alpha = \partial \mathcal{C}_m^\alpha$  sind rotationssymmetrisch, das heißt, invariant unter der Aktion von  $SO(m)$  auf den ersten  $m$  Komponenten. Für eine rotationssymmetrische orientierte  $C^2$ -Hyperfläche  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  und eine rotationssymmetrische kompakte Teilmenge  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  erhalten wir

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) = \int_{\mathcal{M} \cap \mathcal{K}} (x_{m+1})^\alpha d\mathcal{H}^m(x) = c(m) \cdot \int_{\Gamma \cap \mathcal{K}} (x_{m+1})^\alpha u^{m-1} d\mathcal{H}^1(u, x_{m+1}),$$

wobei  $u = |\underline{x}|$ ,  $SO(m). \Gamma = \mathcal{M}$ ,  $SO(m). \mathcal{K} = \mathcal{K}$  mit  $\Gamma, \mathcal{K} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

<sup>13</sup>Aus Symmetrie-Gründen könnten wir auch von nur sechs Ausnahmen sprechen.

<sup>14</sup>Dabei übernehmen  $k$  und  $h$  die Rollen von  $m$  und  $\alpha + 1$  in obigen Argumentationen.



Wir erhalten somit sofort, dass wenn  $\mathcal{M}$   $\mathcal{E}_\alpha$ -kritisch ist,  $\Gamma$   $\mathcal{L}_\alpha$ -kritisch sein muss, mit

$$\mathcal{L}_\alpha(\Gamma \cap \mathcal{K}) := \int_{\Gamma \cap \mathcal{K}} (x_{m+1})^\alpha u^{m-1} d\mathcal{H}^1(u, x_{m+1}), \quad (1.3)$$

wobei  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  kompakt und  $(u, x_{m+1}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Folglich liefert eine  $\mathcal{E}_\alpha$ -kritische Blätterung des  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit rotationssymmetrischen Hyperflächen eine  $\mathcal{L}_\alpha$ -kritische Blätterung des  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Wir werden sehen, dass tatsächlich letztere für uns ausreicht:

Genauer gesagt, reduzieren sich unsere Untersuchungen auf das Auffinden einer  $\mathcal{L}_\alpha$ -kritischen Blätterung des  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \Gamma_m^\alpha$ , wobei  $\Gamma_m^\alpha$  eine Halbgerade ist, mit  $SO(m) \cdot \Gamma_m^\alpha = \mathcal{M}_m^\alpha$ .

Wir betrachten im Folgenden Kurven, die parametrisch gegeben sind durch

$$\begin{cases} u &= e^{z(t)} \cos t, \\ x_{m+1} &= e^{z(t)} \sin t, \end{cases} \quad (1.4)$$

wobei  $z \in C^2(0, \frac{\pi}{2})$ . Für die rechte Seite von (1.3) erhalten wir mit  $t \in [a, b] \subset (0, \frac{\pi}{2})$ :

$$\int_a^b e^{(m+\alpha)z(t)} (\cos t)^{m-1} (\sin t)^\alpha \sqrt{1 + (z'(t))^2} dt.$$

Die betrachtete Kurve ist dann  $\mathcal{L}_\alpha$ -kritisch, wenn  $z$  die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt, nämlich

$$\frac{z''(t)}{1 + (z'(t))^2} \cdot \sin(2t) = (m + \alpha) \sin(2t) + \{(2m - 2) \sin^2 t - 2\alpha \cos^2 t\} \cdot z'(t),$$

welche für  $\sin(2t) \neq 0$  äquivalent ist zu

$$z''(t) = \left(1 + (z'(t))^2\right) \cdot \left\{m + \alpha + \frac{m - \alpha - 1 - (m + \alpha - 1) \cos(2t)}{\sin(2t)} \cdot z'(t)\right\}. \quad (1.5)$$

Löst nun  $z(t)$  die Differentialgleichung (1.5), so löst auch  $z(t) + \ln \lambda$  für alle  $\lambda > 0$  Gleichung (1.5).

Mit anderen Worten, sind Kurven, die homothetisch zu einer  $\mathcal{L}_\alpha$ -kritischen Kurve der Form (1.4) sind, selbst  $\mathcal{L}_\alpha$ -kritisch.

Um die Existenz einer geeigneten Lösung von (1.5) zu garantieren greifen wir, wie [DAVINI], auf die Argumentation mit Hilfe von Ober- und Unterfunktionen bei Untersuchungen gewöhnlicher Differentialgleichungen zurück. Das entsprechende Resultat wollen wir jedoch zunächst in größerer Allgemeinheit als benötigt herleiten:

## 1.8 Ein Lemma aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen

Ein klassisches Resultat aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen besagt, dass im Falle der Existenz einer Unterfunktion  $v$  und einer Oberfunktion  $w$  bezüglich eines Anfangswertproblems die zugehörige Lösung  $y$  zwischen  $v$  und  $w$  im an den Startwert *rechts* angrenzenden

gemeinsamen Existenzintervall verlaufen muss. Bezeichnen wir wieder mit  $y$  die nach links vom Startwert fortgesetzte Lösung und genügen  $v$  und  $w$  auch links vom Startwert entsprechenden Differentialgleichungen, so kann man im Allgemeinen keine Aussage über die gegenseitige Lage dieser Funktionen links vom Startwert treffen. Hier kann zum Beispiel  $y$  auch oberhalb von der Oberfunktion  $w$  verlaufen. Das folgende Lemma garantiert hingegen die Existenz eines Startwertes, sodass die entsprechende Lösung auch links davon zwischen der Ober- und Unterfunktion verläuft.

**Lemma 2.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen. Die Funktion  $f \in C^0(D)$  genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich der zweiten Variablen. Die Funktionen  $v$  und  $w$  seien in einem Intervall  $J \subseteq \pi_x(D)$  differenzierbar, und es gelte

- $v'(x) \leq f(x, v(x))$ ,
- $w'(x) \geq f(x, w(x))$  in  $J$ .

Dann existiert eine nicht-fortsetzbare  $C^1$ -Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

sodass  $\min\{v(x), w(x)\} \leq y(x) \leq \max\{v(x), w(x)\}$  für alle  $x \in J$ .

### Bemerkung:

Hierbei ist  $J$  ein beliebiges Intervall und die Lage sowie das Wachstumsverhalten der Funktionen  $v$  und  $w$  sind nicht vorgegeben.

### Beispiel:

Wir betrachten die Differentialgleichung  $y' = 0$  sowie die Funktionen

$$w(x) = \begin{cases} x^3, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1], \\ (x-1)^3, & \text{falls } x > 1, \end{cases} \quad \text{und} \quad v(x) = -w(x).$$

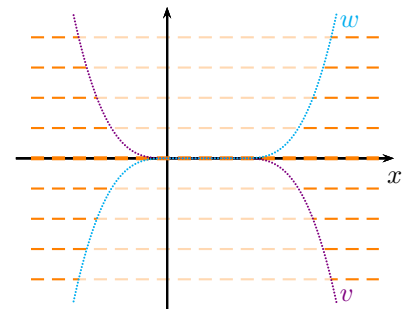


Abb. 3: Angedeutet sind die Lösungskurven  $y \equiv \text{const.}$

Nur die Lösung  $y = 0$  verläuft zwischen  $v$  und  $w$  auf ganz  $\mathbb{R}$ .

**Beweis von Lemma 2.** Wir zeigen insbesondere, dass die gegenseitige Lage der Funktionen  $v$  und  $w$  nicht schlechter sein kann, als im angegebenen Beispiel, das heißt, dass das Vorzeichen der Funktion  $w - v$  auf  $J$  höchstens einmal wechselt.

Da  $f$  lokal Lipschitz-stetig bezüglich  $y$  ist, hat das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta$$

für jedes  $(\xi, \eta) \in D$  eine eindeutig bestimmte nicht-fortsetzbare  $C^1$ -Lösung, welche nach rechts und links dem Rande von  $D$  beliebig nahe kommt.<sup>15</sup>

Starten wir zunächst mit der Situation, dass das Vorzeichen von  $w - v$  nicht wechselt, und betrachten

**Fall 1**  $v(x) \leq w(x)$  für alle  $x \in J$ . Wir setzen  $a := \inf J$ .

**Fall 1.1** Es gelte  $v(x) \leq w(x)$  für alle  $x \in J$  und  $a \in J$ .

Dann ist  $v(\cdot)$  Unterfunktion und  $w(\cdot)$  Oberfunktion bezüglich des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(a) = \eta, \quad (1.6)$$

wobei  $\eta \in [v(a), w(a)]$ , und für die Lösung des Anfangswertproblems (1.6) gilt

$$v(x) \leq y(x) \leq w(x) \quad \text{für alle } x \in J, \quad \text{vgl. [WALTER, § 9].}$$

**Fall 1.2** Es gelte  $v(x) < w(x)$  für alle  $x \in J$  und  $a = \inf J \notin J$ .

Wähle  $\xi \in J$  mit  $\xi > a$  und bezeichne  $y_\eta$  die eindeutig bestimmte nicht-fortsetzbare  $C^1$ -Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta, \quad \text{wobei } \eta \in [v(\xi), w(\xi)].$$

Wie im Fall 1.1 gilt:  $v(x) \leq y_\eta(x) \leq w(x)$  für alle  $x \in [\xi, \infty) \cap J$ .

**Behauptung:** Es existiert ein  $\tilde{\eta} \in [v(\xi), w(\xi)]$ , sodass  $v \leq y_{\tilde{\eta}} \leq w$  auf ganz  $J$  gilt.

Diese Zwischenbehauptung beweisen wir in vier Schritten:

(i) Wir setzen  $M_+ := \{ \eta \in [v(\xi), w(\xi)] : \text{es gibt ein } x \in (a, \xi] \text{ mit } y_\eta(x) = w(x) \}$ .

So ist  $w(\xi) \in M_+$  und  $M_+$  nach unten beschränkt, das heißt, dass  $\inf M_+$  existiert.

Ferner gilt für alle  $\eta \leq \inf M_+$ :

$$w(x) \geq y_\eta(x) \quad \text{für alle } x \in (a, \xi),$$

denn andernfalls gäbe es ein  $\eta_1 \leq \inf M_+$  und ein  $\xi_1 \in (a, \xi)$  mit  $w(\xi_1) < y_{\eta_1}(\xi_1)$ .

Bezeichne  $\bar{y}$  die eindeutig bestimmte nicht-fortsetzbare  $C^1$ -Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(\xi_1) = w(\xi_1).$$

Dann wäre also  $\bar{y}(\xi) \in M_+$  und, da  $y_{\eta_1}$  eine Oberfunktion von  $\bar{y}$  auf  $[\xi_1, \infty) \cap J$  wäre, erhielten wir

$$\inf M_+ \leq \bar{y}(\xi) \leq y_{\eta_1}(\xi) = \eta_1 \leq \inf M_+,$$

sodass  $\bar{y}(\xi) = y_{\eta_1}(\xi)$  und aus der Eindeutigkeit einer Lösung folgte:  $\bar{y}(\cdot) = y_{\eta_1}(\cdot)$ , im Widerspruch zu  $\bar{y}(\xi_1) < y_{\eta_1}(\xi_1)$ .

---

<sup>15</sup>vgl. z.B. [WALTER, § 6]

(ii) Analog zeigt man, dass für alle  $\eta \geq \sup M_-$  gilt:

$$v(x) \leq y_\eta(x) \quad \text{für alle } x \in (a, \xi),$$

wobei  $M_- := \{ \eta \in [v(\xi), w(\xi)] : \text{es gibt ein } x \in (a, \xi] \text{ mit } y_\eta(x) = v(x) \}$ .

(iii) Jede der Mengen  $M_+$  und  $M_-$  ist zusammenhängend. Ohne Einschränkung betrachten wir hier nur die erste Menge. Wäre  $M_+$  nicht zusammenhängend, so existierten  $\eta_2 < \eta_*$  mit  $\eta_2 \in M_+$  und  $\eta_* \in [v(\xi), w(\xi)] \setminus M_+$ . Dann gäbe es auch ein  $\xi_2 \in (a, \xi)$  mit  $y_{\eta_2}(\xi_2) = w(\xi_2)$  und  $y_{\eta_*}(\xi_2) < w(\xi_2)$ . Mit anderen Worten wäre  $y_{\eta_2}$  eine Oberfunktion von  $y_{\eta_*}$  auf  $[\xi_2, \infty) \cap J$ , sodass folgte

$$\eta_* = y_{\eta_*}(\xi) \leq y_{\eta_2}(\xi) = \eta_2,$$

im Widerspruch zu  $\eta_2 < \eta_*$ .

(iv) Es gilt  $\sup M_- \leq \inf M_+$ , denn andernfalls gäbe es ein  $\bar{\eta} \in M_+ \cap M_-$  und  $x_1 \neq x_2 \in (a, \xi]$  mit  $v(x_1) = y_{\bar{\eta}}(x_1)$  und  $w(x_2) = y_{\bar{\eta}}(x_2)$ . Ohne Einschränkung gelte  $x_1 < x_2$ . Sei ferner  $y_1$  die eindeutig bestimmte nicht-fortsetzbare  $C^1$ -Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(x_1) = \frac{(v + w)(x_1)}{2}.$$

Nun wäre  $w$  eine Oberfunktion von  $y_1$ , sodass wir erhielten:

$$y_1(x_2) \leq w(x_2) = y_{\bar{\eta}}(x_2).$$

Des Weiteren hätten wir  $y_1(x_1) > v(x_1) = y_{\bar{\eta}}(x_1)$ , sodass aus der Stetigkeit der Funktionen die Existenz eines  $\tilde{x} \in [x_1, x_2]$  mit  $y_1(\tilde{x}) = y_{\bar{\eta}}(\tilde{x})$  folgte. Die Eindeutigkeit einer Lösung lieferte  $y_1(\cdot) = y_{\bar{\eta}}(\cdot)$ , im Widerspruch zu  $y_1(x_1) > y_{\bar{\eta}}(x_1)$ .

Somit gilt für alle  $\eta \in [\sup M_-, \inf M_+]$ :  $v \leq y_\eta \leq w$  auf ganz  $J$ .

**Fall 1.3** Es gelte  $v(x) = w(x)$  für alle  $x \in J$ , wobei  $J$  ein beliebiges Intervall ist.

Dann ist  $y(\cdot) = v(\cdot)$  die gesuchte Lösung.

Es sei bemerkt, dass im Falle  $v \leq w$  die Situation  $v(t_1) < w(t_1)$  und  $v(t_2) = w(t_2)$  mit  $t_1 < t_2$  nicht eintreten kann, denn bezeichne  $y_v$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y) \quad \text{in } [t_1, t_2] \quad \text{mit} \quad y(t_1) = v(t_1),$$

und  $y_w$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y) \quad \text{in } [t_1, t_2] \quad \text{mit} \quad y(t_1) = w(t_1),$$

so folgte wie im Fall 1.1, dass  $v(x) \leq y_v(x) \leq w(x)$  und  $v(x) \leq y_w(x) \leq w(x)$  für alle  $x \in [t_1, t_2]$ . Wegen  $v(t_2) = w(t_2)$  wäre aber  $y_v(t_2) = y_w(t_2)$ . Die Eindeutigkeit einer Lösung lieferte somit auch  $y_v(\cdot) = y_w(\cdot)$  auf ganz  $[t_1, t_2]$  im Widerspruch zu  $y_v(t_1) < y_w(t_1)$ .

**Fall 2** Es gelte  $v(x) \geq w(x)$  für alle  $x \in J$ .

Für ein  $\xi \in J$  betrachte eine Spiegelung des Problems an der Geraden  $\{x = \xi\}$ :

Setze:  $\tilde{f}(x, y) := -f(2\xi - x, y)$ ,  $\tilde{v}(x) := v(2\xi - x)$ ,  $\tilde{w}(x) := w(2\xi - x)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{v}'(x) &= -v'(2\xi - x) \geq -f(2\xi - x, v(2\xi - x)) = \tilde{f}(x, \tilde{v}(x)), \\ \tilde{w}'(x) &\leq \tilde{f}(x, \tilde{w}(x)), \\ \text{und } \tilde{v}(x) &\geq \tilde{w}(x) \quad \text{in } \tilde{J} := \{x \in \mathbb{R} : 2\xi - x \in J\}.\end{aligned}$$

Fall 1 liefert dann die Existenz einer nicht-fortsetzbaren  $C^1$ -Lösung  $\tilde{y}$  des Anfangswertproblems

$$\tilde{y}' = \tilde{f}(x, \tilde{y})$$

mit  $\tilde{v}(x) \geq \tilde{y}(x) \geq \tilde{w}(x)$  für alle  $x \in \tilde{J}$ . Dann ist  $y(x) = \tilde{y}(2\xi - x)$  die gesuchte Lösung, denn es gilt:

$$\begin{aligned}y'(x) &= -\tilde{y}'(2\xi - x) = -\tilde{f}(2\xi - x, \tilde{y}(2\xi - x)) = f(x, y(x)) \\ \text{und } v(x) &\geq y(x) \geq w(x) \quad \text{für alle } x \in J.\end{aligned}$$

Analog sei bemerkt, dass im Falle  $v \geq w$  die Situation  $v(t_1) = w(t_1)$  und  $v(t_2) > w(t_2)$  mit  $t_1 < t_2$  nicht eintreten kann.

Insgesamt erhalten wir:

Ist  $J$  ein beliebiges Intervall, so benötigen wir nach obigen Überlegungen höchstens zwei Intervalle  $J_-$  und  $J_+$  sodass

$$v|_{J_-} \geq w|_{J_-}, \quad v|_{J_+} \leq w|_{J_+}, \quad v(\xi) = w(\xi) \quad \text{für } \xi \in \partial J_- \cap \partial J_+ \quad \text{und} \quad J_- \cup J_+ = J.$$

Nach obigen Bemerkungen läge insbesondere  $J_-$  links von  $J_+$ .

Fall 2 bzw. Fall 1 liefert schließlich die Existenz einer nicht-fortsetzbaren  $C^1$ -Lösung  $y_-$  bzw.  $y_+$  der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  in  $J_-$  bzw. in  $J_+$  mit  $v(x) \geq y_-(x) \geq w(x)$  für alle  $x \in J_-$  bzw.  $v(x) \leq y_+(x) \leq w(x)$  für alle  $x \in J_+$ . Wegen  $v(\xi) = w(\xi)$  erhalten wir  $y_-(\xi) = y_+(\xi)$ . Die Eindeutigkeit einer Lösung liefert schließlich  $y_-(\cdot) = y_+(\cdot)$ , welches die gesuchte Lösung des Lemmas ist.  $\square$

Tatsächlich können wir, [DAVINI] folgend, in unserem Fall eine Oberfunktion direkt angeben, so dass die Arbeit im Nachweis der Existenz einer geeigneten Unterfunktion steckt. Im Gegensatz zu [DAVINI], der nur ganzzahlige Variablen zu betrachten braucht, wollen wir diese Argumentation bis zum Äußersten ausschöpfen. Dabei reduzieren sich die Betrachtungen auf ein Polynom vierten Grades:

## 1.9 Ein Lemma ein spezielles biquadratisches Polynom betreffend

Im Folgenden setzen wir

$$P_{m,\alpha}(\gamma) := a_4\gamma^4 + a_3\gamma^3 + a_2\gamma^2 + a_1\gamma + a_0,$$

mit

$$a_4 = (m + \alpha)^3,$$

$$a_3 = -(m + \alpha)^2(m + \alpha + 1),$$

$$a_2 = (m + \alpha)(2m + 6\alpha - 4m\alpha - 1),$$

$$a_1 = 4m^2\alpha + 4\alpha^2m - 4\alpha^2 - 5\alpha - m + 1,$$

$$a_0 = -8(m - 1)\alpha.$$

Wir werden das Verhalten dieses Polynoms in Abhängigkeit von  $m$  und  $\alpha$  untersuchen, insbesondere gilt:

**Lemma 3.** Für jedes  $m = 2, 3, \dots$  existiert eine algebraische Zahl  $\alpha_m > \frac{2}{m}$ , sodass für alle  $\alpha \geq \alpha_m$  ein Wert  $\gamma_{m,\alpha} \in (0, 1 - \frac{1}{m+\alpha})$  existiert mit

$$P_{m,\alpha}(\gamma_{m,\alpha}) \geq 0.$$

*Beweis.* Zunächst haben wir

$$P_{m,\alpha}(0) = -8(m - 1)\alpha < 0$$

und

$$P_{m,\alpha}(1 - \frac{1}{m+\alpha}) = -\frac{8(m - 1)\alpha}{m + \alpha} < 0.$$

Ferner erhalten wir für  $m \geq 2, \alpha > \frac{2}{m}$  für die Koeffizienten von  $P_{m,\alpha}(\cdot)$  die Abschätzungen:

$$a_4 = (m + \alpha)^3 > 0,$$

$$a_3 = -(m + \alpha)^2(m + \alpha + 1) < 0,$$

$$a_1 = 5\alpha(\frac{m^2}{4} - 1) + 4\alpha^2(m - 1) + m(\frac{11}{4}m\alpha - 1) + 1 > 0,$$

$$a_0 = -8(m - 1)\alpha < 0,$$

sodass  $P_{m,\alpha}(-\gamma)$  unabhängig von der Größe  $a_2$  immer genau einen Vorzeichenwechsel in seiner Koeffizientenfolge hat:

$$a_4, \quad -a_3, \quad a_2, \quad -a_1, \quad a_0.$$

Nach der kartesischen Zeichenregel hat somit  $P_{m,\alpha}(\cdot)$  in  $(-\infty, 0)$  genau eine Nullstelle.

Des Weiteren ist

$$P_{m,\alpha}(\gamma + 1 - \frac{1}{m+\alpha}) = \tilde{a}_4\gamma^4 + \tilde{a}_3\gamma^3 + \tilde{a}_2\gamma^2 + \tilde{a}_1\gamma + \tilde{a}_0,$$

$$\text{mit } \tilde{a}_4 = (m + \alpha)^3 > 0,$$

$$\tilde{a}_3 = (m + \alpha)^2(3m + 3\alpha - 5) > 0,$$

$$\tilde{a}_2 = (m + \alpha)\{(m - 2)(3m - 4) + \frac{2\alpha}{m}(m^2 - 3m + \frac{3}{2}\alpha m)\} > 0,$$

$$\tilde{a}_0 = -\frac{8(m-1)\alpha}{m+\alpha} < 0, \quad \text{für } m \geq 2, \alpha > \frac{2}{m},$$

sodass wir unabhängig von der Größe  $\tilde{a}_1$  immer genau einen Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge des Polynoms  $P_{m,\alpha}(\gamma + 1 - \frac{1}{m+\alpha})$  haben, mit anderen Worten hat  $P_{m,\alpha}(\cdot)$  in  $(1 - \frac{1}{m+\alpha}, \infty)$  genau eine Nullstelle.

Somit hat  $P_{m,\alpha}(\cdot)$  keine, eine doppelte oder zwei verschiedene Nullstellen im Intervall  $(0, 1 - \frac{1}{m+\alpha})$ , in Abhängigkeit von der Wahl von  $m$  und  $\alpha$ .

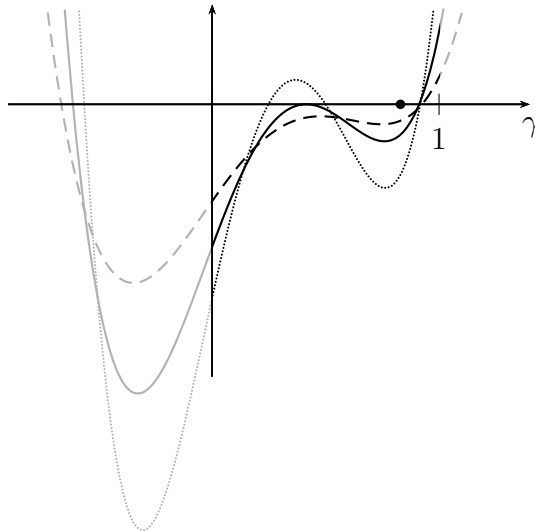


Abb. 4: dargestellt ist  
 $P_{m,\alpha}(\gamma)$  mit  $m = 2$  und  
 $\alpha = 4$  — — —  
 $\alpha = 5,881525129$  ———  
 $\alpha = 10$  .....  
sowie angedeutet die  
Abszisse  $1 - \frac{1}{m+\alpha}$

Wir untersuchen die biquadratische Gleichung

$$P_{m,\alpha}(\gamma) = 0. \tag{1.7}$$

Durch die lineare Transformation  $\gamma = u + \frac{m+\alpha+1}{4(m+\alpha)}$  erhalten wir eine biquadratische Gleichung ohne kubischen Term:

$$u^4 + pu^2 + qu + r = 0, \tag{1.7*}$$

mit

$$p = -\frac{1}{8(m+\alpha)^2}\{3m^2 - 10m + 11 + 3\alpha^2 + 2(19m - 21)\alpha\} < 0, \quad \text{für } m \geq 2, \alpha > \frac{2}{m} > 0,$$

$$q = -\frac{1}{8(m+\alpha)^3}\{\alpha^3 + \alpha^2(11 - 13m) - \alpha(m - 1)(13m + 23) + (m - 3)(m - 1)^2\}$$

$$r = -\frac{1}{256(m+\alpha)^4}\{3\alpha^4 + 172\alpha^3 - 1630\alpha^2 + 204\alpha + 3m^4 - 180\alpha m^3 - 20m^3 - 366\alpha^2 m^2 + 1796\alpha m^2 + 34m^2 - 180\alpha^3 m + 1988\alpha^2 m - 1788\alpha m + 12m - 45\}$$

Die Anzahl der ( reellen ) Lösungen der reduzierten Gleichung (1.7\*) ( und folglich auch von (1.7) ) hängt von den Lösungen der kubischen Resolvente

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0 \quad (1.7^{**})$$

ab. Es ist  $p < 0$  und

$$\begin{aligned} 16(m + \alpha)^4(4r - p^2) &= -3\alpha^4 - 4(3m - 5)\alpha^3 - (274m^2 - 316m + 50)\alpha^2 \\ &\quad - 4(m - 1)(3m^2 + 52m + 45)\alpha - (m - 1)^2(3m^2 - 14m + 19) < 0 \\ &\quad \text{für } m \geq 2, \alpha > \frac{2}{m} > 0, \end{aligned}$$

sodass (1.7\*\*) keine negativen Wurzeln hat, da es keinen Vorzeichenwechsel bei den Koeffizienten

$$-1, \quad 2p, \quad 4r - p^2, \quad -q^2$$

gibt .

Somit hat (1.7\*\*) eine oder drei *positive* Wurzeln ( mit Vielfachheiten gezählt ). Im letzten Fall hat (1.7) vier reelle Wurzeln ( also nach obigen Überlegungen zwei im Intervall  $(0, 1 - \frac{1}{m+\alpha})$  ) und im ersten Fall hat (1.7) zwei reelle und zwei komplex konjugierte Wurzeln.<sup>16</sup>

Die Anzahl der reellen Wurzeln der kubischen Resolvente (1.7\*\*) wird schließlich von dem Vorzeichen ihrer Diskriminante

$$\theta = 27q^4 - 32p^3q^2 + 36p(p^2 - 4r)q^2 + 4(p^2 - 4r)^3 - 4p^2(p^2 - 4r)^2$$

bestimmt.

Insgesamt halten wir fest

i)  $\theta > 0$ , so hat (1.7\*\*) eine einfache positive Wurzel

$$\Rightarrow P_{m,\alpha}(\cdot) \text{ hat keine Nullstelle in } (0, 1 - \frac{1}{m+\alpha}).$$

ii)  $\theta = 0$ , so hat (1.7\*\*) eine einfache und eine doppelte positive Wurzel

$$\Rightarrow P_{m,\alpha}(\cdot) \text{ hat eine doppelte Nullstelle in } (0, 1 - \frac{1}{m+\alpha}).$$

iii)  $\theta < 0$ , so hat (1.7\*\*) drei verschiedene positive Wurzeln

$$\Rightarrow P_{m,\alpha}(\cdot) \text{ hat zwei verschiedene Nullstelle in } (0, 1 - \frac{1}{m+\alpha}).$$

Mit anderen Worten folgt hierbei die Behauptung für solche Werte von  $m$  und  $\alpha$ , für die  $\theta \leq 0$  ist. Bei vorgegebenem  $m$  stellen wir  $\theta$  als eine Funktion in  $\alpha$  dar:  $\theta = \theta_m(\alpha)$ .

---

<sup>16</sup>Eine explizite Darstellung der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung durch die Wurzeln der zugehörigen kubischen Resolvente ist z.B. in [BRONSTEIN & SEMENDJAJEW, sec. 2.4.2.3] zu finden.



Es gilt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(m + \alpha)^{12}}{16\alpha(m - 1)} \cdot \theta_m(\alpha) = \\
 & - 16(m - 1)^2 \alpha^8 \\
 & + 4(m - 1)(8m^2 + 3)\alpha^7 \\
 & + (16m^4 - 256m^3 + 584m^2 - 496m + 153)\alpha^6 \\
 & - 2(32m^5 - 224m^4 + 1238m^3 - 2738m^2 + 2545m - 852)\alpha^5 \\
 & + (m - 1)(16m^5 + 48m^4 - 1712m^3 + 6672m^2 - 4321m - 641)\alpha^4 \\
 & + 2(16m^7 - 208m^6 + 250m^5 + 2302m^4 - 3214m^3 - 588m^2 + 1566m - 123)\alpha^3 \\
 & - (16m^8 - 192m^7 + 984m^6 - 2864m^5 + 1001m^4 + 4184m^3 - 3870m^2 + 794m - 52)\alpha^2 \\
 & + 2(m - 1)(22m^6 - 148m^5 + 363m^4 - 381m^3 + 185m^2 - 60m + 2)\alpha \\
 & + (m - 2)^3(m - 1)^2 m =: \mathbf{p}_m(\alpha).
 \end{aligned}$$

Für  $m = 2, \dots, 6$  hat  $\mathbf{p}_m(\cdot)$  drei Vorzeichenwechsel in seiner Koeffizientenfolge und für  $m \geq 7$  sind es fünf Vorzeichenwechsel, sodass die kartesische Zeichenregel *nicht* garantiert, dass  $\mathbf{p}_m(\cdot)$  nur eine positive Nullstelle hat. Tatsächlich ist dies aber der Fall, was wir mit Hilfe der Regel von Sturm nachweisen. Dazu bilden wir eine Sturm'sche Kette mit

$$f_0^m(\alpha) := \mathbf{p}_m(\alpha), \quad f_1^m(\alpha) := \mathbf{p}_m'(\alpha) \quad \text{und}$$

für  $j = 0, \dots, 6$  ist  $f_{j+2}^m(\cdot)$  rekursiv gegeben durch

$$f_j^m(\alpha) = q_j(\alpha)f_{j+1}^m(\alpha) - f_{j+2}^m(\alpha),$$

wobei der Grad von  $f_{j+2}^m(\alpha)$  kleiner sein soll als der von  $f_{j+1}^m(\alpha)$ , und  $q_j(\alpha)$  ein Polynom ist.

Die Folge  $f_0^m(\alpha), f_1^m(\alpha), \dots, f_8^m(\alpha)$  endet mit einem konstanten von Null verschiedenen Polynom.

Bezeichne ferner  $v_m(a)$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Kette

$$f_0^m(a), f_1^m(a), \dots, f_8^m(a).$$

Nach der Regel von Sturm<sup>17</sup> entspricht die Anzahl reeller Nullstellen von  $f_0^m(\cdot)$  im Intervall  $(a, b)$  genau dem Wert

$$v_m(a) - v_m(b).$$

---

<sup>17</sup>vgl. z.B. [DICKSON, ch. VI, §69]

In unserem Fall haben wir:

		$a = 0$	$a \rightarrow \infty$
Vorzeichen von	$f_0^m(a)$	0 $m = 2$ + $m \geq 3$	—
	$f_1^m(a)$	+	—
	$f_2^m(a)$	—	—
	$f_3^m(a)$	—	+ $m = 2, \dots, 28$ — $m \geq 29$
	$f_4^m(a)$	+ $m = 2$ — $m \geq 3$	+
	$f_5^m(a)$	+ $m = 2, 3$ — $m = 4, 5$ + $m \geq 6$	+ $m = 2, \dots, 4$ — $m = 5, \dots, 10$ + $m \geq 11$
	$f_6^m(a)$	— $m = 2$ + $m \geq 3$	— $m = 2, \dots, 22$ + $m \geq 23$
	$f_7^m(a)$	— $m = 2, \dots, 6$ + $m \geq 7$	—
	$f_8^m(a)$	—	—
	$v_m(a)$	3	2

Nach dem Sturm'schen Satz hat also  $\mathbf{p}_m(\cdot)$  für alle  $m \geq 2$  genau  $3 - 2 = 1$  positive Nullstelle.

Wir bezeichnen diese jeweils durch  $\alpha_m$ . Es gilt

$$\theta_m(\alpha) > 0 \quad \text{für } 0 < \alpha < \alpha_m, \quad \theta_m(\alpha_m) = 0, \quad \theta_m(\alpha) < 0 \quad \text{für } \alpha > \alpha_m.$$

Des Weiteren haben wir

$$\begin{aligned}
 m^8 \cdot \mathbf{p}_m\left(\frac{2}{m}\right) &= 25m^{14} + 80m^{13} - 1611m^{12} + 5114m^{11} + 2544m^{10} + 19620m^9 \\
 &\quad - 65904m^8 + 135888m^7 - 228832m^6 + 215760m^5 - 111152m^4 \\
 &\quad + 18688m^3 + 7232m^2 + 6656m - 4096 > 0 \quad \text{für alle } m \geq 2
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 m^8 \cdot \mathbf{p}_m \left( \frac{12}{m} \right) = & -1775m^{14} + 23560m^{13} - 74111m^{12} - 324326m^{11} + 1065244m^{10} \\
 & + 8010880m^9 - 62969424m^8 + 283180848m^7 - 790863552m^6 \\
 & + 674075520m^5 + 1637169408m^4 - 2203656192m^3 - 5992869888m^2 \\
 & + 13329432576m - 6879707136 < 0 \quad \text{für alle } m \geq 2,
 \end{aligned}$$

sodass wir insbesondere als Abschätzungen für  $\alpha_m$  in Abhängigkeit von  $m \geq 2$  erhalten:

$$\frac{2}{m} < \alpha_m < \frac{12}{m}. \quad \square$$

Es sei bemerkt, dass zur Berechnung der Diskriminanten  $\theta_m(\alpha)$ , der Glieder der Sturm'schen Kette  $f_j^m(\alpha)$ , der Auswertung des Polynoms  $\mathbf{p}_m(\alpha)$  an den Stellen  $\alpha = \frac{2}{m}$  bzw.  $\alpha = \frac{12}{m}$ , sowie der approximativen Bestimmung der  $\alpha_m$ 's, welche am Anfang festgehalten wurde, in der vorliegenden Arbeit die *Wolfram Language* auf einem *Raspberry Pi 2, Model B*, herangezogen wurde.

Für diese Berechnungen benötigt man aber ausschließlich Multiplikationen und Additionen, sodass diese auch in (hinreichend großer) endlicher Zeit per Hand durchgeführt werden könnten. Die approximativen Bestimmungen der Nullstellen der jeweiligen Polynome  $\mathbf{p}_m(\cdot)$  können zum Beispiel nach dem Horner-Schema erfolgen, vgl. [DICKSON, ch. VII, § 74].

Im Folgenden führen wir alle Rechnungen wieder komplett per Hand aus:

### 1.10 Beweis von Satz 1

Unser Ziel ist es – wie im ersten Beweis von Satz 1, vgl. S. 21 – eine geeignete Ausgangsfunktion zu bestimmen. Allerdings werden wir hier diese nicht explizit angeben können.

Wir setzen zunächst  $y = z'$  in unserer Differentialgleichung (1.5) und erhalten:

$$y' = (1 + y^2) \cdot \left\{ m + \alpha + \frac{m - \alpha - 1 - (m + \alpha - 1) \cos(2t)}{\sin(2t)} \cdot y \right\} =: H_{m,\alpha}(t, y). \quad (1.8)$$

Dann ist

$$H_{m,\alpha}: (0, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig partiell differenzierbar.

Wir betrachten die Funktion

$$g_{m,\alpha}(t) := (m + \alpha) \cdot \frac{\sin(2t)}{(m + \alpha - 1) \cos(2t) - (m - \alpha - 1)},$$

dann gilt

$$H_{m,\alpha}(t, g_{m,\alpha}(t)) = 0 \quad \text{in } (0, t_{m,\alpha}) \cup (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2}),$$

wobei

$$t_{m,\alpha} := \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{m - \alpha - 1}{m + \alpha - 1} \right) = \arctan \sqrt{\frac{\alpha}{m - 1}}$$

genau dem eingeschlossenen Winkel zwischen  $\Gamma_m^\alpha$  und der Abszissenachse entspricht.

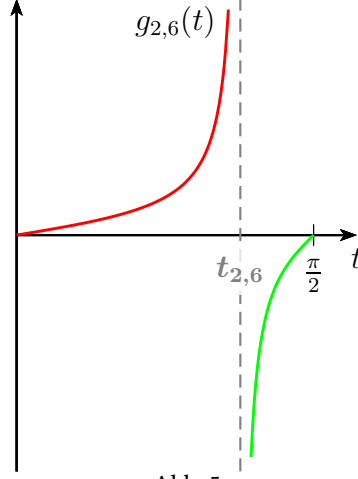


Abb. 5

Ferner gilt

$$g_{m,\alpha}'(t) = 2(m + \alpha) \frac{(m - 1)(1 - \cos(2t)) + \alpha(1 + \cos(2t))}{\{(m + \alpha - 1) \cos(2t) - (m - \alpha - 1)\}^2} \geq 0 = H_{m,\alpha}(t, g_{m,\alpha}(t)),$$

sodass  $g_{m,\alpha}$  eine Oberfunktion von (1.8) auf  $(0, t_{m,\alpha}) \cup (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2})$  ist. Nach Lemma 2 wissen wir, dass dann aus der Existenz einer Unterfunktion von (1.8) die Existenz einer Lösung folgt. Letztere läge dabei zwischen der Ober- und Unterfunktion. Finden wir nun ein  $\gamma \in (0, 1)$ , sodass  $\gamma \cdot g_{m,\alpha}$  eine Unterfunktion ist, so hätte die Lösung auch das gleiche Verhalten wie  $g_{m,\alpha}$ . Wir suchen also ein  $\gamma \in (0, 1)$  mit

$$\gamma \cdot g_{m,\alpha}'(t) \leq H_{m,\alpha}(t, \gamma \cdot g_{m,\alpha}(t)) \quad \text{für alle } t \in (0, t_{m,\alpha}) \cup (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2}). \quad (1.9)$$

Wir haben

$$\gamma g_{m,\alpha}'(t) = 2\gamma(m + \alpha) \frac{m + \alpha - 1 - (m - \alpha - 1) \cos(2t)}{\{(m + \alpha - 1) \cos(2t) - (m - \alpha - 1)\}^2},$$

$$H_{m,\alpha}(t, \gamma g_{m,\alpha}(t)) = (1 + \gamma^2 g_{m,\alpha}^2(t))(m + \alpha)(1 - \gamma),$$

sodass (1.9) lautet:

$$(1 - \gamma) + (1 - \gamma)\gamma^2 g_{m,\alpha}^2(t) - 2\gamma \cdot \frac{m + \alpha - 1 - (m - \alpha - 1) \cos(2t)}{\{(m + \alpha - 1) \cos(2t) - (m - \alpha - 1)\}^2} \geq 0, \quad (1.9^*)$$

was für  $t \neq t_{m,\alpha}$  äquivalent ist zu

$$a \cdot \cos^2(2t) - 2b \cdot \cos(2t) + c \geq 0, \quad (1.9^{**})$$

mit

$$\begin{aligned} a &= (1 - \gamma)((m + \alpha - 1)^2 - \gamma^2(m + \alpha)^2), \\ b &= (m - \alpha - 1)(m + \alpha - 1 - \gamma(m + \alpha)), \\ c &= (1 - \gamma)\gamma^2(m + \alpha)^2 - 2\gamma(m + \alpha - 1) + (1 - \gamma)(m - \alpha - 1)^2. \end{aligned}$$

Damit (1.9\*\*) in ganz  $(0, \frac{\pi}{2})$  erfüllt ist, muss insbesondere  $\gamma \in (0, 1 - \frac{1}{m+\alpha})$  sein, denn

- (i) für  $\gamma = 1 - \frac{1}{m+\alpha}$  erhalten wir  $a = b = 0$  und  $c = -\frac{4(m-1)\alpha}{m+\alpha} < 0$ , und
- (ii) mit  $1 - \frac{1}{m+\alpha} < \gamma < 1$  gilt ebenfalls  $c < 0$ , sodass die linke Seite von (1.9\*\*) für  $t$  um  $\frac{\pi}{4}$  negativ wäre.

Um die Behauptung,  $c < 0$ , hierbei nachzuweisen, untersuchen wir  $c$  in Abhängigkeit von  $\gamma$ . Es ist

$$c(\gamma) = -(m + \alpha)^2\gamma^3 + (m + \alpha)^2\gamma^2 - ((m - \alpha - 1) + 2(m + \alpha - 1))\gamma + (m - \alpha - 1)^2$$

und insbesondere

$$c(\gamma + 1 - \frac{1}{m+\alpha}) = -(m + \alpha)^2\gamma^3 - (m + \alpha)(2m + 2\alpha - 3)\gamma^2 - 2((m - 1)^2 + \alpha^2)\gamma - \frac{4(m-1)\alpha}{m+\alpha}.$$

Da das letzte Polynom (in unseren Fällen  $m \geq 2, \alpha > \frac{2}{m}$ ) nur negative Koeffizienten hat, findet bei  $c(\cdot)$  kein Vorzeichenwechsel in  $(1 - \frac{1}{m+\alpha}, +\infty)$  statt.

Somit muss  $\gamma \in (0, 1 - \frac{1}{m+\alpha})$  sein, was äquivalent zu  $a > 0$  ist. Für positive Koeffizienten  $a$ , kann die linke Seite von (1.9\*\*) nach unten abgeschätzt werden durch

$$c - \frac{b^2}{a}.$$

Um die Ausgangsfrage zu klären, genügt es somit Bedingungen an  $m$  und  $\alpha$  zu finden, sodass ein  $\gamma \in (0, 1 - \frac{1}{m+\alpha})$  existiert mit

$$c - \frac{b^2}{a} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \xLeftrightarrow[m \geq 2, \alpha > \frac{2}{m} > 0]{\gamma \in (0, 1)} & \{ (1 - \gamma)\gamma(m + \alpha)^2 - 2(m + \alpha - 1) \} (1 - \gamma) \{ m + \alpha - 1 + \gamma(m + \alpha) \} \\ & + (m - \alpha - 1)^2 \{ 2 - \gamma(m + \alpha + 1) + \gamma^2(m + \alpha) \} \geq 0. \end{aligned}$$

Ein Sortieren nach Potenzen von  $\gamma$  liefert auf der linken Seite der letzten Ungleichung das Polynom  $P_{m,\alpha}(\gamma)$ , welches wir bereits untersucht haben.

Nach Lemma 3 existiert für alle  $m = 2, 3, \dots$  eine algebraische Zahl  $\alpha_m > \frac{2}{m}$ , sodass für beliebige  $\alpha \geq \alpha_m$  immer ein Wert  $\gamma_{m,\alpha} \in (0, 1 - \frac{1}{m+\alpha})$  existiert, für welchen

$$P_{m,\alpha}(\gamma_{m,\alpha}) \geq 0$$

erfüllt ist, beziehungsweise gilt nach obigen Überlegungen:

$$\gamma_{m,\alpha} \cdot g_{m,\alpha}'(t) \leq H_{m,\alpha}(t, \gamma_{m,\alpha} \cdot g_{m,\alpha}(t)) \quad \text{für alle } t \in (0, t_{m,\alpha}) \cup (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2}).$$

Folglich liefert Lemma 2 die Existenz einer  $C^1$ -Lösung  $y_{m,\alpha}$  von (1.8) auf  $(0, t_{m,\alpha}) \cup (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2})$  mit

$$0 < \gamma_{m,\alpha} \cdot g_{m,\alpha}(t) \leq y_{m,\alpha}(t) \leq g_{m,\alpha}(t) \quad \text{für alle } t \in (0, t_{m,\alpha})$$

und

$$0 > \gamma_{m,\alpha} \cdot g_{m,\alpha}(t) \geq y_{m,\alpha}(t) \geq g_{m,\alpha}(t) \quad \text{für alle } t \in (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2}).$$

Insbesondere gilt:

$$\lim_{t \nearrow t_{m,\alpha}} y_{m,\alpha}(t) = +\infty, \quad \lim_{t \searrow t_{m,\alpha}} y_{m,\alpha}(t) = -\infty,$$

$$\lim_{t \searrow 0} y_{m,\alpha}(t) = 0 = \lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} y_{m,\alpha}(t),$$

sowie für alle  $t \in (0, t_{m,\alpha}) \cup (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2})$ :

$$y_{m,\alpha}'(t) \geq (1 + y_{m,\alpha}^2(t)) \cdot \left\{ m + \alpha + \frac{m - \alpha - 1 - (m + \alpha - 1) \cos(2t)}{\sin(2t)} \cdot g_{m,\alpha}(t) \right\} = 0,$$

sodass  $y_{m,\alpha}$  monoton wächst.

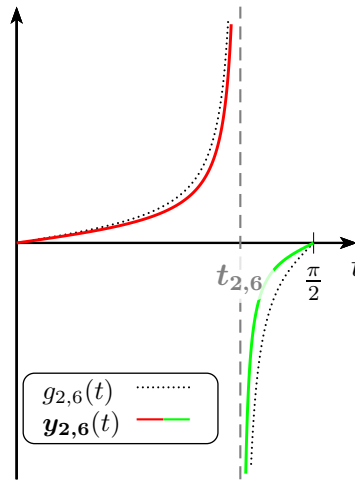


Abb. 6

Wir betrachten nun die Kurven

$$\mathcal{I}_{m,\alpha;1} := \{ (u, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^2 : u = e^{z_{m,\alpha}(t)} \cos t, \quad x_{m+1} = e^{z_{m,\alpha}(t)} \sin t, \quad t \in (0, t_{m,\alpha}) \}$$

und

$$\mathcal{I}_{m,\alpha;-1} := \{ (u, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^2 : u = e^{z_{m,\alpha}(t)} \cos t, \quad x_{m+1} = e^{z_{m,\alpha}(t)} \sin t, \quad t \in (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2}) \},$$

wobei  $z_{m,\alpha}$  eine Stammfunktion von  $y_{m,\alpha}$  ist mit

$$\lim_{t \searrow 0} z_{m,\alpha}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} z_{m,\alpha}(t) = 0.$$

Somit ist  $z_{m,\alpha}$  eine  $C^2$ -Lösung der Differentialgleichung (1.5) auf  $(0, t_{m,\alpha}) \cup (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2})$ , mit anderen Worten haben wir: Die Kurven  $\Gamma_{m,\alpha;1}$  und  $\Gamma_{m,\alpha;-1}$  sind  $\mathcal{L}_\alpha$ -kritisch.

Aus den Eigenschaften von  $y_{m,\alpha}$  folgt weiter, dass

$$\lim_{t \rightarrow t_{m,\alpha}} z_{m,\alpha}(t) = +\infty,$$

sodass sich die Kurven  $\Gamma_{m,\alpha;1}$  und  $\Gamma_{m,\alpha;-1}$  für  $t \rightarrow t_{m,\alpha}$  asymptotisch der Halbgeraden

$$\Gamma_m^\alpha \setminus \{0\} = \left\{ x_{m+1} = \sqrt{\frac{\alpha}{m-1}} u, \quad u > 0 \right\}$$

annähern, vgl. die Beispiele in Abb. 7 und 8.

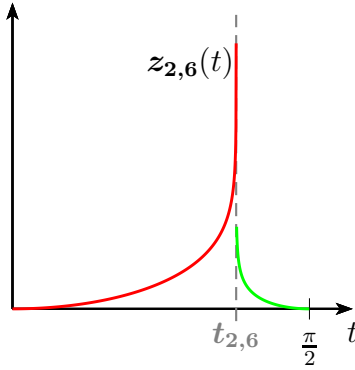


Abb. 7

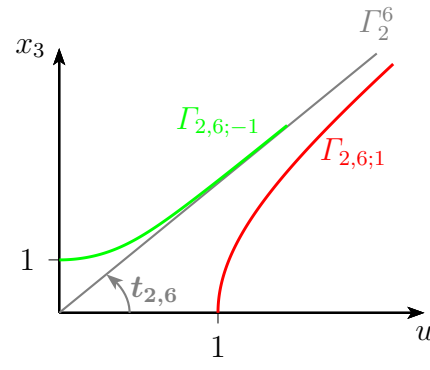


Abb. 8

Ferner löst auch

$$z_{m,\alpha;\lambda}(t) := z_{m,\alpha}(t) + \ln \lambda$$

die Differentialgleichung (1.5) für alle  $\lambda > 0$  und die entsprechenden Kurven

$$\begin{aligned} \Gamma_{m,\alpha;\lambda} &:= \{ (u, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^2 : u = e^{z_{m,\alpha;\lambda}(t)} \cos t, \quad x_{m+1} = e^{z_{m,\alpha;\lambda}(t)} \sin t, \quad t \in (0, t_{m,\alpha}) \} \\ &= \lambda \cdot \Gamma_{m,\alpha;1} \end{aligned}$$

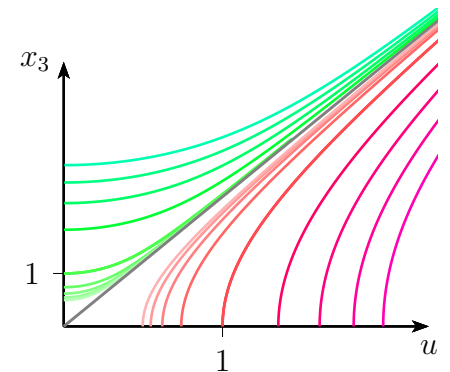
und

$$\begin{aligned} \Gamma_{m,\alpha;-\lambda} &:= \{ (u, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^2 : u = e^{z_{m,\alpha;\lambda}(t)} \cos t, \quad x_{m+1} = e^{z_{m,\alpha;\lambda}(t)} \sin t, \quad t \in (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2}) \} \\ &= \lambda \cdot \Gamma_{m,\alpha;-1} \end{aligned}$$

sind  $\mathcal{L}_\alpha$ -kritische Kurven, welche homothetisch zu  $\Gamma_{m,\alpha;1}$  beziehungsweise  $\Gamma_{m,\alpha;-1}$  sind. Des Weiteren sind alle diese Kurven paarweise disjunkt und die ein-parametrische Familie  $(\Gamma_{m,\alpha;\lambda} \cup \Gamma_{m,\alpha;-\lambda})_{\lambda>0}$  überdeckt vollständig  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \Gamma_m^\alpha$ . Mit anderen Worten ist die Familie  $(\Gamma_{m,\alpha;\lambda} \cup \Gamma_{m,\alpha;-\lambda})_{\lambda>0}$  eine  $\mathcal{L}_\alpha$ -kritische Blätterung von  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \Gamma_m^\alpha$ .

Dabei liegt ein Punkt  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \Gamma_m^\alpha$  genau dann auf  $\Gamma_{m,\alpha;\tilde{\lambda}} \cup \Gamma_{m,\alpha;-\tilde{\lambda}}$ , wenn

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \cdot e^{-z_{m,\alpha}(\tilde{t})} \quad \text{mit} \quad \tilde{t} = \arctan \frac{\zeta_2}{\zeta_1}.$$


 Abb. 9: Dargestellt sind Kurven aus einer  $\mathcal{L}_6$ -kritischen Blätterung von  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \Gamma_2^6$

Wir können somit direkt eine Funktion angeben, deren Höhenlinien genau mit den Kurven  $\Gamma_{m,\alpha;\pm\lambda}$  übereinstimmen:

$$\mathbf{f}_{m,\alpha}(u, x_{m+1}) := \begin{cases} \sqrt{u^2 + x_{m+1}^2} \cdot e^{-z_{m,\alpha}(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}, & 0 < \arctan \frac{x_{m+1}}{u} < t_{m,\alpha}, \\ -\sqrt{u^2 + x_{m+1}^2} \cdot e^{-z_{m,\alpha}(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}, & t_{m,\alpha} < \arctan \frac{x_{m+1}}{u} < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dann ist  $\mathbf{f}_{m,\alpha} \in C^2(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \Gamma_m^\alpha)$  und lässt sich stetig auf ganz  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  fortsetzen. Diese fortgesetzte Funktion bezeichnen wir wieder mit  $\mathbf{f}_{m,\alpha}$  und erhalten für  $\lambda > 0$ :

$$\{\mathbf{f}_{m,\alpha} = \lambda\} \cap \{x_{m+1} \neq 0\} = \Gamma_{m,\alpha;\lambda} \quad \text{bzw.} \quad \{\mathbf{f}_{m,\alpha} = -\lambda\} \cap \{u \neq 0\} = \Gamma_{m,\alpha;-\lambda},$$

sowie

$$\{\mathbf{f}_{m,\alpha} = 0\} = \Gamma_m^\alpha.$$

Des Weiteren gilt auf  $\{0 < \arctan \frac{x_{m+1}}{u} < t_{m,\alpha}\}$ :

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{f}_{m,\alpha} = \frac{u + x_{m+1} \cdot z_{m,\alpha}'(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}{\sqrt{u^2 + x_{m+1}^2} \cdot e^{z_{m,\alpha}(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}} = \frac{u + x_{m+1} \cdot y_{m,\alpha}(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}{\sqrt{u^2 + x_{m+1}^2} \cdot e^{z_{m,\alpha}(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}} > 0,$$

und auf  $\{t_{m,\alpha} < \arctan \frac{x_{m+1}}{u} < \frac{\pi}{2}\}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \mathbf{f}_{m,\alpha} = \frac{-x_{m+1} + u \cdot z_{m,\alpha}'(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}{\sqrt{u^2 + x_{m+1}^2} \cdot e^{z_{m,\alpha}(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}} = \frac{-x_{m+1} + u \cdot y_{m,\alpha}(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}{\sqrt{u^2 + x_{m+1}^2} \cdot e^{z_{m,\alpha}(\arctan \frac{x_{m+1}}{u})}} < 0,$$

sodass wir  $\nabla \mathbf{f}_{m,\alpha} \neq 0$  auf ganz  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \Gamma_m^\alpha$  haben.

Somit orientiert  $\frac{\nabla \mathbf{f}_{m,\alpha}}{|\nabla \mathbf{f}_{m,\alpha}|}$  die  $\mathcal{L}_\alpha$ -kritischen Kurven  $\Gamma_{m,\alpha;\pm\lambda}$  als  $C^1$ -Einheitsnormalenvektorfeld.

Nach Proposition 2 erhalten wir sofort

$$\operatorname{div}_{\mathbb{R}^2} \left( (x_{m+1})^\alpha u^{m-1} \frac{\nabla \mathbf{f}_{m,\alpha}}{|\nabla \mathbf{f}_{m,\alpha}|} \right) = 0 \quad \text{auf ganz } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \Gamma_m^\alpha.$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$\mathbf{F}_{m,\alpha}(\underline{x}, x_{m+1}) := \mathbf{f}_{m,\alpha}(|\underline{x}|, x_{m+1}).$$

Dann ist  $\mathbf{F}_{m,\alpha} \in C^2((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \{\underline{x} = 0\}) \setminus \mathcal{M}_m^\alpha) \cap C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ ,  $\{\mathbf{F}_{m,\alpha} \geq 0\} = \mathcal{C}_m^\alpha$  und  $\{\mathbf{F}_{m,\alpha} = 0\} = \mathcal{M}_m^\alpha$ . Ferner haben wir

$$\nabla \mathbf{F}_{m,\alpha}(x) = \left( \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{f}_{m,\alpha}(u, x_{m+1}) \Big|_{u=|\underline{x}|} \cdot \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}, \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \mathbf{f}_{m,\alpha}(|\underline{x}|, x_{m+1}) \right),$$

sodass nach obigen Überlegungen gilt:

$$|\nabla \mathbf{F}_{m,\alpha}| = |\nabla \mathbf{f}_{m,\alpha}|_{u=|\underline{x}|} \neq 0$$



und

$$\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{m+1}} \left( (x_{m+1})^\alpha \frac{\nabla \mathbf{F}_{m,\alpha}}{|\nabla \mathbf{F}_{m,\alpha}|} \right) = u^{1-m} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^2} \left( (x_{m+1})^\alpha u^{m-1} \frac{\nabla \mathbf{f}_{m,\alpha}}{|\nabla \mathbf{f}_{m,\alpha}|} \right) \Big|_{u=|\underline{x}|} = 0$$

auf  $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \setminus \{\underline{x} = 0\}) \setminus \mathcal{M}_m^\alpha$ .

Mit anderen Worten hat  $\mathbf{F}_{m,\alpha}$  bei festem  $m \in \{2, 3, \dots\}$  und beliebigem  $\alpha \geq \alpha_m$ , wobei  $\alpha_m$  die eindeutige positive Nullstelle des Polynoms  $\mathbf{p}_m$  – dargestellt auf S. 33 – ist, die gewünschten Eigenschaften, vgl. S. 23, sodass wir wie in unserem ersten Beweis schließen können, vgl. S. 21.  $\square$

**Bemerkung 1:**

Zusammenfassend kann man sagen, dass für obige Schlussweise Bedingungen an  $m \geq 2$  und  $\alpha > 0$  gesucht wurden, sodass ein  $\gamma \in (0, 1)$  existiert, sodass die Ungleichung

$$(1 - \gamma) + (1 - \gamma)\gamma^2 g_{m,\alpha}^2(t) - 2\gamma \cdot \frac{m + \alpha - 1 - (m - \alpha - 1) \cos(2t)}{\{(m + \alpha - 1) \cos(2t) - (m - \alpha - 1)\}^2} \geq 0 \quad (1.9^*)$$

auf dem Intervall  $(0, t_{m,\alpha}) \cup (t_{m,\alpha}, \frac{\pi}{2})$  erfüllt ist. Nach der Regel von de l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow t_{m,\alpha}} \frac{g_{m,\alpha}(t)}{((m + \alpha - 1) \cos(2t) - (m - \alpha - 1))^{-1}} = \frac{2(m + \alpha)}{m + \alpha - 1} \sqrt{\alpha(m - 1)},$$

sodass für  $t \rightarrow t_{m,\alpha}$  in (1.9\*) folgt

$$(1 - \gamma)\gamma^2 \frac{4(m + \alpha)^2 \alpha(m - 1)}{(m + \alpha - 1)^2} - 2\gamma \left( m + \alpha - 1 - \frac{(m - \alpha - 1)^2}{m + \alpha - 1} \right) \geq 0$$

$$\xLeftrightarrow[\substack{\gamma > 0 \\ m + \alpha - 1 > 0}]{(1 - \gamma)\gamma \geq \frac{2(m + \alpha - 1)}{(m + \alpha)^2}}$$

Dabei hat die letzte Ungleichung Lösungen in  $(0, 1)$  solange

$$\frac{2(m + \alpha - 1)}{(m + \alpha)^2} \leq \frac{1}{4}$$

erfüllt ist, das heißt,

$$m + \alpha \geq 4 + \sqrt{8}.$$

Somit sind die Kegelmäntel  $\mathcal{M}_m^\alpha$  obiger minimierender Kegel alle  $\mathcal{E}_\alpha$ -stabil, vgl. z.B. DIERKES et al. [2, p. 168].

**Bemerkung 2:**

Alle Abbildungen wurden mit PSTricks erstellt. So wurden in der vorliegenden Arbeit Lösungen der Differentialgleichungen (1.8) bzw. (1.5) mit dem Zusatzpaket pst-ode bestimmt, vgl. Abb. 6 bzw. Abb. 7. Interessant ist, dass dabei die Ausgabe als PostScript Objekt gespeichert wird, sodass darauf auch in der Parametrisierung kritischer Kurven zurückgegriffen werden kann, vgl. Abb. 8 und Abb. 9. Zu erwähnen ist, dass Lösungen auf einem *links* vom Anfangswert gelegenen Intervall in der vorliegenden Arbeit durch eine Spiegelung des Problems konstruiert wurden.

Es ist wohlbekannt, dass – bei ganzzahligem  $\alpha$  – rotierte  $\mathcal{S}_\alpha$ -kritische Hyperflächen verschwindenden mittleren Krümmungsvektor haben, vgl. [PALAIS], aber auch DIERKES [6]. Dadurch lassen sich Ergebnisse aus der Theorie minimaler Untermannigfaltigkeiten auf  $\mathcal{S}_\alpha$ -kritische Hyperflächen übertragen. Insbesondere erhalten wir so eine geeignete Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung. Es sei bemerkt, dass eine solche Ungleichung bereits von DIERKES [5] für beliebige  $\alpha > 0$  angegeben wurde, jedoch mit einer speziellen Kleinheitsbedingung. Der Zugang über die rotierten Flächen zeigt, dass man diese Kleinheitsbedingung bei ganzzahligem  $\alpha$  nicht benötigt, vgl. Satz 2 unten. Dann können wir DIERKES [5] folgend auch verbesserte punktweise Krümmungsabschätzungen erhalten, vgl. Satz 3 unten. Tatsächlich werden wir auch zeigen, dass die  $\mathcal{S}_\alpha$ -Stabilität einer Hyperfläche die Stabilität der rotierten Fläche nach sich zieht, sodass wir direkt auf Krümmungsabschätzungen bei stabilen minimalen Hyperflächen zurückgreifen werden.

Wir starten mit der Betrachtung des mittleren Krümmungsvektorfeldes, der Norm der zweiten Fundamentalform, sowie der zweiten Variation des gewichteten Area-Funktional, insbesondere auf rotierten Hyperflächen.

## 2.1 Das mittlere Krümmungsvektorfeld auf Untermannigfaltigkeiten

Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$  eine orientierte  $m$ -dimensionale  $C^2$ -Untermannigfaltigkeit. Dann lässt sich der mittlere Krümmungsvektor in einem Punkt  $x \in \mathcal{M}$  auf folgende äquivalente Weisen definieren beziehungsweise bestimmen:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x) &= - \sum_{\beta=1}^k (\operatorname{div}_{\mathcal{M}} n_\beta(x)) n_\beta(x) = - \sum_{\beta=1}^k \sum_{j=1}^m \langle D_{t_j(x)} n_\beta(x), t_j(x) \rangle n_\beta(x) = \\ &= \sum_{\beta=1}^k \sum_{j=1}^m \langle D_{t_j(x)} t_j(x), n_\beta(x) \rangle n_\beta(x) = \left( \sum_{j=1}^m D_{t_j(x)} t_j(x) \right)^\perp, \end{aligned}$$

wobei  $t_1(x), \dots, t_m(x)$  eine orthonormale Basis des Tangentialraumes  $T_x \mathcal{M}$ ,  $n_1(x), \dots, n_k(x)$  mit  $k = N - m$  eine orthonormale Basis des Normalenraumes  $N_x \mathcal{M}$  und  $(\cdot)^\perp$  den Normalenanteil im Punkt  $x \in \mathcal{M}$  bezeichnet, das heißt, die Projektion auf den Normalenraum  $N_x \mathcal{M}$ , vgl. z.B. DIERKES et al. [1, sec. 4.3] und [2, sec. 3.2], sowie [SIMONS, p. 68].

Der Begriff des mittleren Krümmungsvektorfeldes auf Untermannigfaltigkeiten ist sehr natürlich, in dem Sinne, dass er unabhängig von der Wahl der Basen der entsprechenden Tangential- und Normalenräume und somit auch von der Orientierung der Untermannigfaltigkeit ist. Ferner erhält man

mit Hilfe einer ersten Variation des Area-Funktionalen bezüglich des mittleren Krümmungsvektorfeldes (vgl. S. 15 mit  $a(x) \equiv 1$  und  $\mathfrak{X}(x) = \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x)$ ) eine intuitive Vorstellung für die Richtung des mittleren Krümmungsvektors:

*„Namely, it may be pictured as pointing toward the “inside” of  $\mathcal{M}$ , in the sense that if  $\mathcal{M}$  is deformed by moving each point in the direction of the mean curvature vector at that point, then the volume of  $\mathcal{M}$  will initially decrease“, vgl. [OSSERMAN, p. 1095].*

Mit obigen Überlegungen erhalten wir sofort die folgenden Beispiele:

### Beispiel 1:

Sei  $\mathbb{S}_R^n(0) := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| = R\}$  die  $n$ -dimensionale Sphäre mit Radius  $R$  und Mittelpunkt 0. Dann haben wir

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathbb{S}_R^n(0)}(y) = -\frac{n}{R} \frac{y}{|y|}. \quad (2.1)$$

Einen expliziten Nachweis geben wir auch noch später, vgl. S. 50.

### Beispiel 2:

Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  eine  $\mathcal{G}_\alpha$ -kritische  $C^2$ -Hyperfläche. Nach Proposition 1 haben wir

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x) = \frac{\alpha}{x_{m+1}} (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} n_{\mathcal{M}}(x). \quad (2.2)$$

## 2.2 Rotationssymmetrische Hyperflächen

### 2.2.1. Das mittlere Krümmungsvektorfeld

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  eine offene Menge und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  eine orientierte  $C^2$ -Hyperfläche, wobei  $\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset$  und  $\partial\mathcal{M} \cap \Omega = \emptyset$ . Ferner bezeichnen jeweils  $t_1(x), \dots, t_m(x)$  eine orthonormale Basis des Tangentialraumes  $T_x\mathcal{M}$  und  $n_{\mathcal{M}}(x)$  einen Einheitsnormalenvektor im Punkt  $x \in \mathcal{M}$ .

Wir betrachten die rotierte Hyperfläche

$$\mathbb{S}^n.\mathcal{M} := \{\omega.x := (\underline{x}, x_{m+1} \cdot \omega) : x = (\underline{x}, x_{m+1}) \in \mathcal{M}, \omega \in \mathbb{S}_1^n(0)\} \subset \mathbb{R}^{m+n+1}.$$

Bezeichne ferner  $\iota: \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$  die triviale Einbettung mit  $\iota(\mathbb{R}^{n+1}) = \{0\}^m \times \mathbb{R}^{n+1}$ .

Des Weiteren stelle  $\vartheta_1(x_{m+1} \cdot \omega), \dots, \vartheta_n(x_{m+1} \cdot \omega)$  eine orthonormale Basis des  $T_{x_{m+1} \cdot \omega} \mathbb{S}_{x_{m+1}}^n((\underline{x}, 0))$ .

Dann bilden die Vektoren  $\omega.t_1(x), \dots, \omega.t_m(x), \iota(\vartheta_1(x_{m+1} \cdot \omega)), \dots, \iota(\vartheta_n(x_{m+1} \cdot \omega))$  eine orthonormale Basis des  $T_{\omega.x}(\mathbb{S}^n.\mathcal{M})$ . Nun haben wir

$$\langle \omega.n_{\mathcal{M}}(x), \iota(\vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega)) \rangle = (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} \cdot \langle \omega, \vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega) \rangle = 0 \quad \text{für alle } l = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

sodass  $\omega.n_{\mathcal{M}}(x)$  ein Einheitsnormalenvektor im Punkt  $\omega.x \in \mathbb{S}^n.\mathcal{M}$  ist. Somit erhalten wir

**Proposition 7.** Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  eine orientierte  $C^2$ -Hyperfläche. Auf der rotierten Hyperfläche  $\mathbb{S}^n.\mathcal{M}$  hat der mittlere Krümmungsvektor im Punkt  $\omega.x$  die Darstellung:

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathbb{S}^n.\mathcal{M}}(\omega.x) = \omega \cdot \left( \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x) - \frac{n}{x_{m+1}} (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} n_{\mathcal{M}}(x) \right).$$

*Beweis.* Wir haben

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_{\mathbb{S}^n.\mathcal{M}}(\omega.x) &= \left\{ \sum_{j=1}^m D_{\omega.t_j(x)} \omega.t_j(x) + \sum_{l=1}^n D_{\iota(\vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega))} \iota(\vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega)) \right\}^{N_{\omega.x}(\mathbb{S}^n.\mathcal{M})} = \\ &= \left\{ \omega \cdot \left( \sum_{j=1}^m D_{t_j(x)} t_j(x) \right) + \iota \left( \sum_{l=1}^n D_{\vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega)} \vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega) \right) \right\}^{N_{\omega.x}(\mathbb{S}^n.\mathcal{M})} = \\ &= \left\{ \omega \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x) + \omega \cdot \left\{ \sum_{j=1}^m D_{t_j(x)} t_j(x) \right\}^{T_x \mathcal{M}} + \iota \left( \vec{\mathcal{H}}_{\mathbb{S}_{x_{m+1}}^n((x,0))}(x_{m+1} \cdot \omega) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \iota \left( \left\{ \sum_{l=1}^n D_{\vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega)} \vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega) \right\}^{T_{x_{m+1} \cdot \omega} \mathbb{S}_{x_{m+1}}^n((x,0))} \right) \right\}^{N_{\omega.x}(\mathbb{S}^n.\mathcal{M})} = \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \left\{ \omega \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x) + \iota \left( \vec{\mathcal{H}}_{\mathbb{S}_{x_{m+1}}^n((x,0))}(x_{m+1} \cdot \omega) \right) \right\}^{N_{\omega.x}(\mathbb{S}^n.\mathcal{M})} = \\ &\stackrel{\text{Bsp. 1}}{=} \omega \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x) - \frac{n}{x_{m+1}} \langle \iota(\omega), \omega \cdot n_{\mathcal{M}} \rangle \omega \cdot n_{\mathcal{M}} = \\ &\stackrel{|\omega|^2=1}{=} \omega \cdot \left( \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x) - \frac{n}{x_{m+1}} (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} n_{\mathcal{M}}(x) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Ist nun  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{E}_\alpha$ -kritische Hyperfläche, so haben wir in Beispiel 2 gesehen, dass ihr mittlerer Krümmungsvektor die Darstellung

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x) = \frac{\alpha}{x_{m+1}} (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} n_{\mathcal{M}}(x),$$

hat, sodass sofort folgt

**Korollar 1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  offen und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  eine orientierte  $C^2$ -Hyperfläche, wobei  $\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $\partial \mathcal{M} \cap \Omega = \emptyset$  und  $\mathcal{H}^m(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$ . Ist ferner  $\alpha \in \mathbb{N}$ , so erhalten wir:

$\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}$  ist eine  $(m + \alpha)$ -dimensionale minimale Hyperfläche in  $\mathbb{S}^\alpha.\Omega$ , d.h.  $\vec{\mathcal{H}}_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}} \equiv 0$ , genau dann, wenn  $\mathcal{M}$   $\mathcal{E}_\alpha$ -kritisch in  $\Omega$  ist.

Ein wohlbekanntes Ergebnis nach dem Palais-Prinzip:

„critical symmetric points are symmetric critical points“,

welches hier greift, vgl. [PALAIS, thm. 5.1], aber auch DIERKES [6], wobei wir unter

$$\mathbb{S}^\alpha.\Omega := \{ \omega.x : x \in \Omega, \omega \in \mathbb{S}_1^\alpha(0) \} \subset \mathbb{R}^{m+\alpha+1}$$

verstehen.

### 2.2.2. Eine Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung

Zu  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  betrachten wir die rotationssymmetrische Funktion  $\mathfrak{f}: \mathbb{S}^n \cdot \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit

$$\mathfrak{f}(\omega \cdot x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \omega \in \mathbb{S}_1^n(0).$$

Dann liefert die Rotationssymmetrie zunächst

$$D_{\iota(\partial_t(x_{m+1} \cdot \omega))} \mathfrak{f}(\omega \cdot x) = 0$$

sowie

$$D_{\omega \cdot t_j(x)} \mathfrak{f}(\omega \cdot x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{f}(\omega \cdot \gamma(t)) - \mathfrak{f}(\omega \cdot \gamma(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = D_{t_j(x)} f(x),$$

wobei  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma'(0) = t_j(x)$ . Somit folgt

$$\nabla_{\mathbb{S}^n \cdot \mathcal{M}} \mathfrak{f}(\omega \cdot x) = \sum_{j=1}^m D_{\omega \cdot t_j(x)} \mathfrak{f}(\omega \cdot x) \omega \cdot t_j(x) = \sum_{j=1}^m D_{t_j(x)} f(x) \omega \cdot t_j(x) = \omega \cdot \nabla_{\mathcal{M}} f(x)$$

und insbesondere

$$|\nabla_{\mathbb{S}^n \cdot \mathcal{M}} \mathfrak{f}(\omega \cdot x)| = |\nabla_{\mathcal{M}} f(x)|. \quad (2.4)$$

Schließlich liefert die Rotationssymmetrie von  $\mathbb{S}^n \cdot \mathcal{M}$  und der Funktion  $\mathfrak{f}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^n \cdot \mathcal{M}} \mathfrak{f} d\mathcal{H}^{m+n} &= \int_{\mathcal{M}} \int_{\iota(\mathbb{S}_{x_{m+1}}^n((x,0)))} \mathfrak{f}(y) d\mathcal{H}^n(y) d\mathcal{H}^m(x) = \\ &= \sigma_n \cdot \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^n f(x) d\mathcal{H}^m(x) \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$= \int_{\mathbb{S}_1^n(0)} \int_{\omega \cdot \mathcal{M}} \mathfrak{f}(y) d\mathcal{H}^m(y) d\mathcal{H}^n(\omega), \quad (2.5b)$$

wobei  $\sigma_n := \mathcal{H}^n(\mathbb{S}_1^n(0))$  und  $\omega \cdot \mathcal{M} := \{\omega \cdot x : x \in \mathcal{M}\} \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$ .

**Satz 2.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  offen und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  eine  $\delta_\alpha$ -kritische  $C^2$ -Hyperfläche, wobei  $\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $\partial \mathcal{M} \cap \Omega = \emptyset$  und  $\mathcal{H}^m(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$ . Ist ferner  $\alpha \in \mathbb{N}$ , so erfüllt jede Funktion  $f \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  die Ungleichung

$$\left( \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha f^{\frac{m+\alpha}{m+\alpha-1}}(x) d\mathcal{H}^m(x) \right)^{\frac{m+\alpha-1}{m+\alpha}} \leq \mathbf{c}(m, \alpha) \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha |\nabla_{\mathcal{M}} f(x)| d\mathcal{H}^m(x), \quad (2.6)$$

mit einer Konstanten  $\mathbf{c}(m, \alpha)$ , die nur von  $m$  und  $\alpha$  abhängt.

#### Bemerkung:

Wir haben hier zunächst einen anderen Exponenten als in DIERKES [5], mit Hilfe der Hölder-Ungleichung erhalten wir später aber den für die punktweise Krümmungsabschätzungen benötigten Exponenten. Ferner verbessert dieses Resultat für ganzzahlige  $\alpha$  das Ergebnis aus DIERKES [5], da wir hier ohne Kleinheitsbedingung auskommen. Die Vermutung liegt nahe, dass eine solche Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung auch für alle  $\alpha > 0$  erfüllt sein sollte, jedoch wäre dazu ein alternativer Beweis als der Zugang über die rotierten Flächen nötig.

*Beweis von Satz 2.* Wir haben bereits gesehen, dass bei ganzzahligem  $\alpha$  die rotierte Hyperfläche  $\mathbb{S}^\alpha \mathcal{M}$  minimal ist, vgl. Korollar 1, sodass die Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung, vgl. [MICHAEL & SIMON], die Behauptung liefert:

Betrachten wir hierzu die rotationssymmetrische Funktion  $f: \mathbb{S}^n \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit

$$f(\omega.x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \omega \in \mathbb{S}_1^n(0),$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha f^{\frac{m+\alpha}{m+\alpha-1}} d\mathcal{H}^m \right)^{\frac{m+\alpha-1}{m+\alpha}} &\stackrel{(2.5a)}{=} \sigma_\alpha^{\frac{1-m-\alpha}{m+\alpha}} \left( \int_{\mathbb{S}^\alpha \mathcal{M}} f^{\frac{m+\alpha}{m+\alpha-1}} d\mathcal{H}^{m+\alpha} \right)^{\frac{m+\alpha-1}{m+\alpha}} \\ &\stackrel{\text{M.S.}}{\leq} \sigma_\alpha^{\frac{1-m-\alpha}{m+\alpha}} \mathbf{c}_{\text{MS}} \int_{\mathbb{S}^\alpha \mathcal{M}} |\nabla_{\mathbb{S}^n \mathcal{M}} f| d\mathcal{H}^{m+\alpha} \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \stackrel{(2.5a)}{=} m+\alpha \sqrt{\sigma_\alpha} \mathbf{c}_{\text{MS}} \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha |\nabla_{\mathcal{M}} f| d\mathcal{H}^m, \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{c}_{\text{MS}} = \mathbf{c}_{\text{MS}}(m, \alpha)$  die Konstante aus der klassischen Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung bezeichnet, welche nach [BURAGO & ZALGALLER, sec. 28.4] hier als

$$\frac{2^{m+\alpha+1}}{m+\alpha \sqrt{\omega_{m+\alpha}}}$$

gewählt werden kann mit  $\omega_n = \frac{\sigma_{n-1}}{n}$ . Somit können wir in (2.6) die Konstante  $\mathbf{c}(m, \alpha)$  wählen als

$$m+\alpha \sqrt{\frac{\sigma_\alpha}{\omega_{m+\alpha}}} \cdot 2^{m+\alpha+1}.$$

□

**Proposition 8.** *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 2 haben wir*

$$\left( \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha f^{\frac{p(m+\alpha)}{m+\alpha-p}} d\mathcal{H}^m \right)^{\frac{m+\alpha-p}{(m+\alpha)p}} \leq \mathbf{c}(m, \alpha) \cdot \frac{p(m+\alpha-1)}{m+\alpha-p} \cdot \left( \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha |\nabla_{\mathcal{M}} f|^p d\mathcal{H}^m \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.7)$$

für alle  $p \in [1, m+\alpha)$ .

Der Nachweis erfolgt durch die Anwendung der Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung auf die Funktion  $f^\gamma$ , wobei

$$\gamma := \frac{p(m+\alpha-1)}{m+\alpha-p} \geq 1,$$

und anschließender Ausnutzung der Hölder-Ungleichung, vgl. z.B. DIERKES et al. [2, p. 207].

**Bemerkung:**

Insbesondere ist eine Abschätzung (2.7) mit  $p = 2$  wichtig für punktweise Krümmungsabschätzungen, vgl. DIERKES [5]. Hier haben wir diese ohne Kleinheitsbedingung für ganzzahlige  $\alpha$  erhalten. Doch bevor wir uns den Krümmungsabschätzungen widmen, betrachten wir zunächst die

## 2.3 Zweite Variation des gewichteten Area-Funktional

Im Beweis von Proposition 1 haben wir gesehen, dass die erste Variation des gewichteten Area-Funktional bezüglich des Variationsvektorfeldes  $\mathfrak{X} \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  gegeben ist durch

$$\delta \mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathfrak{X}) = \int_{\mathcal{M}} \langle (\nabla a)^\perp - a \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{X} \rangle d\mathcal{H}^m,$$

sodass wir  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{A}$ -kritische Untermannigfaltigkeit nannten, falls  $a \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} \equiv (\nabla a)^\perp$ . Tatsächlich haben wir die Nachweise nur für Hyperflächen gegeben, jedoch lassen sich diese direkt auch auf Untermannigfaltigkeiten beliebiger Kodimension übertragen. Für die zweite Variation erhalten wir

**Proposition 9.** *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen,  $a \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$  eine orientierte  $m$ -dimensionale  $\mathcal{A}$ -kritische  $C^2$ -Untermannigfaltigkeit, wobei  $\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $\partial \mathcal{M} \cap \Omega = \emptyset$  und  $\mathcal{H}^m(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$ . Dann ist die zweite Variation des gewichteten Area-Funktional bezüglich eines normalen Variationsvektorfeldes  $\mathfrak{X} \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , das heißt mit  $(\mathfrak{X}(x))^\perp = \mathfrak{X}(x)$  für alle  $x \in \mathcal{M} \cap \Omega$ , gegeben durch*

$$\delta^2 \mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathfrak{X}) = \int_{\mathcal{M}} a \sum_{j=1}^m |(D_{t_j} \mathfrak{X})^\perp|^2 + \langle D^2 a \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \rangle - a \langle \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{X} \rangle^2 - a \sum_{i,j=1}^m \langle (D_{t_i} t_j)^\perp, \mathfrak{X} \rangle^2 d\mathcal{H}^m.$$

*Beweis.* Es bezeichne  $\Phi_\varepsilon$  eine ein-parametrische Familie von Diffeomorphismen  $\Omega \rightarrow \Omega$  mit

- $\Phi_\varepsilon(x) = \Phi(\varepsilon, x)$  ist eine  $C^3$ -Abbildung:  $(-1, 1) \times \Omega \rightarrow \Omega$ ,
- $\Phi_0(x) = x$  für alle  $x \in \Omega$ ,
- $\Phi_\varepsilon(x) = x$  für alle  $\varepsilon \in (-1, 1)$  und alle  $x \in \Omega \setminus \mathcal{L}$  für ein  $\mathcal{L}(\text{kompakt}) \subset \Omega$ ,

wobei

$$\mathfrak{X}(x) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\varepsilon, x) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Ferner setzen wir

$$\mathfrak{Z}(x) := \left. \frac{\partial^2}{\partial^2 \varepsilon} \Phi(\varepsilon, x) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Nach der Area-Formel haben wir

$$\mathcal{A}(\Phi_\varepsilon(\mathcal{M} \cap \mathcal{L})) = \int_{\mathcal{M} \cap \mathcal{L}} a(\Phi_\varepsilon(x)) \cdot J_{\Psi_\varepsilon}(x) d\mathcal{H}^m(x),$$

wobei  $J_{\Psi_\varepsilon}$  die Jacobi-Determinante von

$$\Psi_\varepsilon := \Phi_\varepsilon|_{\mathcal{M} \cap \Omega}$$

bezeichnet. Die Bestimmung der zweiten Variation reduziert sich somit erneut auf die Differentiation des Integranden.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial^2 \varepsilon} (a(\Phi_\varepsilon(x)) \cdot J_{\Psi_\varepsilon}(x)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \langle \nabla a(\Phi_\varepsilon(x)), \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\varepsilon, x) \rangle \cdot J_{\Psi_\varepsilon}(x) + a(\Phi_\varepsilon(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J_{\Psi_\varepsilon}(x) \right\} \\
 &= \langle D^2 a(\Phi_\varepsilon(x)) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\varepsilon, x), \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\varepsilon, x) \rangle \cdot J_{\Psi_\varepsilon}(x) \\
 &\quad + \langle \nabla a(\Phi_\varepsilon(x)), \frac{\partial^2}{\partial^2 \varepsilon} \Phi(\varepsilon, x) \rangle \cdot J_{\Psi_\varepsilon}(x) \\
 &\quad + 2 \langle \nabla a(\Phi_\varepsilon(x)), \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\varepsilon, x) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J_{\Psi_\varepsilon}(x) \\
 &\quad + a(\Phi_\varepsilon(x)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 \varepsilon} J_{\Psi_\varepsilon}(x).
 \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir nach der Taylor-Entwicklung von  $J_{\Psi_\varepsilon}$ , vgl. z.B. DIERKES et al. [2, p.149]:

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial^2 \varepsilon} J_{\Psi_\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{Z} + (\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X})^2 + \sum_{j=1}^m |(D_{t_j} \mathfrak{X})^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^m \langle t_i, D_{t_j} \mathfrak{X} \rangle \langle t_j, D_{t_i} \mathfrak{X} \rangle.$$

Nun ist  $\mathfrak{X}$  ein normales Vektorfeld, sodass wir auf  $\mathcal{M} \cap \Omega$  erhalten

$$\langle t_i, D_{t_j} \mathfrak{X} \rangle = -\langle D_{t_j} t_i, \mathfrak{X} \rangle = -\langle (D_{t_j} t_i)^\perp, \mathfrak{X} \rangle = -\langle (D_{t_i} t_j)^\perp, \mathfrak{X} \rangle,$$

sowie

$$\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X} = -\langle \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{X} \rangle,$$

und insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial^2}{\partial^2 \varepsilon} (a(\Phi_\varepsilon) \cdot J_{\Psi_\varepsilon}) \right|_{\varepsilon=0} &= \langle D^2 a \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \rangle + \langle \nabla a, \mathfrak{Z} \rangle + 2 \langle \nabla a, \mathfrak{X} \rangle \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X} + \\
 &\quad + a \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{Z} + a (\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X})^2 + a \sum_{j=1}^m |(D_{t_j} \mathfrak{X})^\perp|^2 - a \sum_{i,j=1}^m \langle (D_{t_i} t_j)^\perp, \mathfrak{X} \rangle^2.
 \end{aligned}$$

Schließlich ist  $\mathcal{M}$  auch  $\mathcal{A}$ -kritisch, sodass wir wie im Beweis von Proposition 1 erhalten

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla a, \mathfrak{Z} \rangle + a \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{Z} \, d\mathcal{H}^m = 0$$

und auf  $\mathcal{M} \cap \Omega$  zudem

$$\langle \nabla a, \mathfrak{X} \rangle = \langle (\nabla a)^\perp, \mathfrak{X} \rangle = a \langle \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{X} \rangle = -a \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X}$$

und somit

$$2 \langle \nabla a, \mathfrak{X} \rangle \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X} + a (\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X})^2 = -a (\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathfrak{X})^2 = -a \langle \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{X} \rangle^2.$$

Da  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $\Omega \cap \partial \mathcal{M} = \emptyset$  erhalten wir für die zweite Variation des gewichteten Area-Funktional das gewünschte Ergebnis:

$$\delta^2 \mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathfrak{X}) = \int_{\mathcal{M}} \langle D^2 a \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \rangle - a \langle \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{X} \rangle^2 + a \sum_{j=1}^m |(D_{t_j} \mathfrak{X})^\perp|^2 - a \sum_{i,j=1}^m \langle (D_{t_i} t_j)^\perp, \mathfrak{X} \rangle^2 \, d\mathcal{H}^m.$$

□



**Korollar 2.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen,  $a \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$  eine orientierte  $\mathcal{A}$ -kritische  $C^2$ -Hyperfläche, wobei  $\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $\partial \mathcal{M} \cap \Omega = \emptyset$  und  $\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$ . Dann ist die zweite Variation des gewichteten Area-Funktional bezüglich eines normalen Variationsvektorfeldes  $\mathfrak{X} \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , das heißt mit  $\mathfrak{X}|_{\mathcal{M} \cap \Omega} = \varphi \cdot n_{\mathcal{M}}$  für ein  $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$ , gegeben durch

$$\delta^2 \mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathfrak{X}) = \int_{\mathcal{M}} a |\nabla_{\mathcal{M}} \varphi|^2 + \varphi^2 \langle D^2 a n_{\mathcal{M}}, n_{\mathcal{M}} \rangle - a \varphi^2 |\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}|^2 - a |\mathbf{B}_{\mathcal{M}}|^2 \varphi^2 d\mathcal{H}^{N-1},$$

wobei  $|\mathbf{B}_{\mathcal{M}}|^2$  die Norm der zweiten Fundamentalform auf  $\mathcal{M}$  bezeichnet:

$$|\mathbf{B}_{\mathcal{M}}(x)|^2 := \sum_{i,j=1}^m |(D_{t_i(x)} t_j(x))^\perp|^2.$$

Diese Beobachtung motiviert die folgende

**Definition.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen,  $a \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$  eine orientierte  $\mathcal{A}$ -kritische  $C^2$ -Hyperfläche, wobei  $\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $\partial \mathcal{M} \cap \Omega = \emptyset$  und  $\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$ . Wir nennen  $\mathcal{M}$   **$\mathcal{A}$ -stabil in  $\Omega$** , wenn

$$\int_{\mathcal{M}} \{a |\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}|^2 + a |\mathbf{B}_{\mathcal{M}}|^2 - \langle D^2 a n_{\mathcal{M}}, n_{\mathcal{M}} \rangle\} \varphi^2 d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\mathcal{M}} a |\nabla_{\mathcal{M}} \varphi|^2 d\mathcal{H}^{N-1}$$

für alle  $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

### Beispiel I:

Mit  $a \equiv 1$  ist das betrachtete Funktional das Area-Funktional, und wir erhalten die klassische Definition für die Stabilität einer minimalen Hyperfläche, vgl. z.B. DIERKES et al. [2, p.152]:

$$\int_{\mathcal{M}} |\mathbf{B}_{\mathcal{M}}|^2 \varphi^2 d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}} \varphi|^2 d\mathcal{H}^{N-1} \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

### Beispiel II:

Mit  $a(x) = (x_{m+1})^\alpha$  ist das betrachtete Funktional die  $\alpha$ -Energie, und wir erhalten Beispiel 2 folgend

$$\langle D^2 a n_{\mathcal{M}}, n_{\mathcal{M}} \rangle = \alpha(\alpha - 1)(x_{m+1})^{\alpha-2} ((n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1})^2 = (x_{m+1})^\alpha \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) |\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}|^2,$$

und somit die klassische Definition für die  $\mathcal{E}_\alpha$ -Stabilität einer  $\mathcal{E}_\alpha$ -kritischen Hyperfläche, vgl. z.B. DIERKES et al. [2, p.156]:

$$\int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha \left\{ \frac{1}{\alpha} |\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}|^2 + |\mathbf{B}_{\mathcal{M}}|^2 \right\} \varphi^2 d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha |\nabla_{\mathcal{M}} \varphi|^2 d\mathcal{H}^{N-1}$$

für alle  $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

### 2.3.1. Die Norm der zweiten Fundamentalform

Betrachten wir zunächst die Sphäre  $\mathbb{S}_R^n(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und bezeichne  $\vartheta_1(y), \dots, \vartheta_n(y)$  eine orthogonale Basis des  $T_y \mathbb{S}_R^n(0)$ . Da

$$\nu(y) = \frac{y}{R}$$

eine Einheitsnormale im Punkt  $y \in \mathbb{S}_R^n(0)$  bildet, betragen die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform von  $\mathbb{S}_R^n(0)$  in  $y$ :

$$h_{kl}(y) = \langle \nu(y), D_{\vartheta_k(y)} \vartheta_l(y) \rangle = -\langle \vartheta_l(y), D_{\vartheta_k(y)} \nu(y) \rangle = -\frac{1}{R} \langle \vartheta_l(y), \vartheta_k(y) \rangle = -\frac{1}{R} \delta_{kl}.$$

Somit erhalten wir

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathbb{S}_R^n(0)}(y) = \sum_{l=1}^n h_{ll}(y) \nu(y) = -\frac{n}{R} \frac{y}{|y|}$$

und

$$|\mathbb{B}_{\mathbb{S}_R^n(0)}(y)|^2 = \sum_{k,l=1}^n (h_{kl}(y))^2 = \frac{n}{R^2}. \quad (2.8)$$

**Proposition 10.** Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  eine orientierte  $C^2$ -Hyperfläche. Auf der rotierten Hyperfläche  $\mathbb{S}^n \mathcal{M}$  beträgt die Norm der zweiten Fundamentalform im Punkt  $\omega.x$ :

$$|\mathbb{B}_{\mathbb{S}^n \mathcal{M}}(\omega.x)|^2 = |\mathbb{B}_{\mathcal{M}}(x)|^2 + \frac{n}{(x_{m+1})^2} \left( (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} \right)^2.$$

*Beweis.* Unter  $(\cdot)^\perp$  verstehen wir zunächst die Projektion auf  $N_{\omega.x}(\mathbb{S}^n \mathcal{M})$ , das heißt, nach (2.3) gilt  $(\cdot)^\perp = \langle \cdot, \omega.n_{\mathcal{M}} \rangle \omega.n_{\mathcal{M}}$ , sodass wir erhalten

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}_{\mathbb{S}^n \mathcal{M}}(\omega.x)|^2 &= \sum_{i,j=1}^m |\{D_{\omega.t_i(x)} \omega.t_j(x)\}^\perp|^2 + \sum_{k,l=1}^n |\{D_{\iota(\vartheta_k(x_{m+1} \cdot \omega))} \iota(\vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega))\}^\perp|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^m |\{\omega.(D_{t_i(x)} t_j(x))\}^\perp|^2 + \sum_{k,l=1}^n |\{\iota(D_{\vartheta_k(x_{m+1} \cdot \omega)} \vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega))\}^\perp|^2 \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \sum_{i,j=1}^m |\{(D_{t_i(x)} t_j(x))\}^{N_{\mathcal{M}}}|^2 + \sum_{k,l=1}^n |\langle D_{\vartheta_k(x_{m+1} \cdot \omega)} \vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega), (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} \cdot \omega \rangle|^2 \\ &= |\mathbb{B}_{\mathcal{M}}(x)|^2 + \left( (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} \right)^2 \sum_{k,l=1}^n |\{D_{\vartheta_k(x_{m+1} \cdot \omega)} \vartheta_l(x_{m+1} \cdot \omega)\}^{N_{x_{m+1} \cdot \omega} \mathbb{S}_{x_{m+1}}^n((\underline{x}, 0))}|^2 \\ &= |\mathbb{B}_{\mathcal{M}}(x)|^2 + \left( (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} \right)^2 |\mathbb{B}_{\mathbb{S}_{x_{m+1}}^n((\underline{x}, 0))}(x_{m+1} \cdot \omega)|^2 \\ &\stackrel{(2.8)}{=} |\mathbb{B}_{\mathcal{M}}(x)|^2 + \frac{n}{(x_{m+1})^2} \left( (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} \right)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Nach Beispiel 2 gilt für den mittleren Krümmungsvektor  $\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}$  einer  $\mathfrak{S}_\alpha$ -kritischen Hyperfläche  $\mathcal{M}$

$$\frac{1}{\alpha} |\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(x)|^2 = \frac{\alpha}{(x_{m+1})^2} \left( (n_{\mathcal{M}}(x))_{m+1} \right)^2,$$

sodass wir mit Korollar 1 erhalten:

**Proposition 11.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  offen und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$  eine orientierte  $C^2$ -Hyperfläche, wobei  $\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $\partial\mathcal{M} \cap \Omega = \emptyset$  und  $\mathcal{H}^m(\mathcal{M} \cap \mathcal{K}) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$ . Ist ferner  $\alpha \in \mathbb{N}$ , so erhalten wir:

$\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}$  ist eine stabile Hyperfläche in  $\mathbb{S}^\alpha.\Omega$  genau dann, wenn  $\mathcal{M}$   $\mathcal{E}_\alpha$ -stabil in  $\Omega$  ist.

**Bemerkung:**

Wie bereits angedeutet, folgt die  $\mathcal{E}_\alpha$ -Stabilität von  $\mathcal{M}$  sofort aus der Stabilität von  $\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}$  mit obigen Darstellungen. Interessant ist hierbei die Rückrichtung, das heißt, dass auch die  $\mathcal{E}_\alpha$ -Stabilität die Stabilität der Minimalfläche  $\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}$  nach sich zieht. Natürlich spielt die Rotationssymmetrie auch hierbei die entscheidende Rolle:

*Beweis von Proposition 11.*

„ $\Rightarrow$ “ Sei also  $\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}$  eine stabile Hyperfläche in  $\mathbb{S}^\alpha.\Omega$ . Insbesondere ist also  $\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}$  eine Minimalfläche, sodass wir nach Korollar 1 erhalten, dass  $\mathcal{M}$   $\mathcal{E}_\alpha$ -kritisch in  $\Omega$  ist. Sei nun  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$  eine beliebige Testfunktion. Wir betrachten die rotationssymmetrische Funktion  $\varphi : \mathbb{S}^\alpha.\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $\varphi(\omega.x) = \varphi(x)$ . Dann ist  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{S}^\alpha.\Omega)$  und die Stabilität von  $\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}$  liefert

$$0 \leq \int_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}} |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}} \varphi|^2 - |\mathbf{B}_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}}|^2 \varphi^2 d\mathcal{H}^{m+\alpha} \\ \stackrel{(2.4), (2.5a)}{\stackrel{\text{Prop. 10}}{=}} \sigma_\alpha \int_{\mathcal{M}} (x_{m+1})^\alpha \left( |\nabla_{\mathcal{M}} \varphi|^2 - \left\{ |\mathbf{B}_{\mathcal{M}}|^2 + \frac{1}{\alpha} |\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}|^2 \right\} \varphi^2 \right) d\mathcal{H}^m,$$

also die  $\mathcal{E}_\alpha$ -Stabilität von  $\mathcal{M}$  in  $\Omega$ .

„ $\Leftarrow$ “ Sei umgekehrt  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{E}_\alpha$ -stabile Hyperfläche in  $\Omega$ . Nach Korollar 1 folgt, dass  $\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}$  eine minimale Hyperfläche in  $\mathbb{S}^\alpha.\Omega$  ist. Wir zeigen, dass diese auch stabil ist:

indirekt:

Angenommen es existiert ein  $\phi \in C_c^1(\mathbb{S}^\alpha.\Omega)$  mit

$$\int_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}} |\mathbf{B}_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}}|^2 \phi^2 - |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}} \phi|^2 d\mathcal{H}^{m+\alpha} > 0. \quad (\star)$$

Wir zeigen, dass dann auch ein *rotationssymmetrisches*  $\phi \in C_c^1(\mathbb{S}^\alpha.\Omega)$  existiert, welches der letzten Ungleichung genügt, im Widerspruch zur  $\mathcal{E}_\alpha$ -Stabilität von  $\mathcal{M}$ . Zur Konstruktion einer solchen Testfunktion schreiben wir die linke Seite von  $(\star)$  mit Hilfe von (2.5b) um und erhalten:

$$\int_{\mathbb{S}_1^\alpha(0)} \int_{\omega.\mathcal{M}} |\mathbf{B}_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}}(y)|^2 \phi(y)^2 - |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}} \phi(y)|^2 d\mathcal{H}^m(y) d\mathcal{H}^\alpha(\omega) > 0$$

Dann existiert also ein  $\sigma \in \mathbb{S}_1^\alpha(0)$  mit

$$\int_{\sigma.\mathcal{M}} |\mathbf{B}_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}}(y)|^2 \phi(y)^2 - |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}} \phi(y)|^2 d\mathcal{H}^m(y) > 0.$$

Betrachte nun  $\phi : \mathbb{S}^\alpha.\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\phi(\omega.x) := \phi(\sigma.x)$  für alle  $\omega \in \mathbb{S}_1^\alpha(0)$  und  $x \in \Omega$ . Dann ist  $\phi \in C_c^1(\mathbb{S}^\alpha.\Omega)$  und rotationssymmetrisch. Die Darstellungsformel der Norm der zweiten Fundamentalform einer rotationssymmetrischen Hyperfläche, vgl. Proposition 10, liefert

$$|\mathbf{B}_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}}(\omega.x)| = |\mathbf{B}_{\mathbb{S}^\alpha.\mathcal{M}}(\sigma.x)|.$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned} |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}} \phi(\omega.x)| &= |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}} \phi(\sigma.x)| = |\{\nabla_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}} \phi(\sigma.x)\}^{T_{\sigma.x}(\sigma.\mathcal{M})}| = |\{\nabla_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}} \phi(\sigma.x)\}^{T_{\sigma.x}(\sigma.\mathcal{M})}| \\ &\leq |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}} \phi(\sigma.x)|. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}} |B_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}}|^2 \phi^2 - |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}} \phi|^2 d\mathcal{H}^{m+\alpha} &= \\ &= \int_{\mathbb{S}_1^\alpha(0)} \int_{\omega.\mathcal{M}} |B_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}}(y)|^2 \phi(y)^2 - |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}} \phi(y)|^2 d\mathcal{H}^m(y) d\mathcal{H}^\alpha(\omega) \\ &\geq \int_{\mathbb{S}_1^\alpha(0)} \int_{\sigma.\mathcal{M}} |B_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}}(y)|^2 \phi(y)^2 - |\nabla_{\mathbb{S}^\alpha, \mathcal{M}} \phi(y)|^2 d\mathcal{H}^m(y) d\mathcal{H}^\alpha(\omega) \stackrel{(*)}{>} 0. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:**

Wenn  $\alpha$  ganzzahlig ist, lassen sich folglich viele Ergebnisse aus der Theorie minimaler Hyperflächen übertragen auf  $\mathcal{E}_\alpha$ -kritische Flächen und umgekehrt. Solche Resultate sind im Abschnitt 3.4 der Monographie »*Global analysis of minimal surfaces*« von DIERKES et al. – wahrlich geeignet – zusammengetragen und ausgearbeitet worden. Mit anderen Worten sind bei ganzzahligem  $\alpha$  die folgenden Ergebnisse äquivalent:

aus DIERKES et al. [2, sec. 3.4]		betrifft
prop. 1	prop. 2	Stabilität von Kegeln
thm. 1	thm. 2	Nicht-Existenz von stabilen Kegeln
thm. 3	thm. 5	integrale Krümmungsabschätzungen
cor. 1	cor. 2	Aussagen vom Bernstein'schen Typ mit Wachstumsbedingungen

Tatsächlich haben wir hierbei keinen Mehrgewinn, da wir uns “nur” auf ganzzahliges  $\alpha$  konzentrieren, und diese Ergebnisse –  $\mathcal{E}_\alpha$ -kritische Flächen betreffend – von Dierkes für beliebige  $\alpha > 0$  in voller Fülle untersucht worden sind.

Anders sieht es aber bei den punktweisen Krümmungsabschätzungen aus. Als ein wichtiges Zwischenergebnis kann dabei zum Beispiel eine Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung verwendet werden. In seiner Arbeit [5] hat DIERKES auf direktem Wege zwar eine solche Ungleichung erhalten, jedoch unter einer zusätzlichen Kleinheitsbedingung, die auch Auswirkungen auf die punktweisen Krümmungsabschätzungen hat. Wir haben bereits in Satz 2 gesehen, dass wir bei einem Umweg über eine rotierte Fläche ohne eine solche Kleinheitsbedingung auskommen können. Zum Abschluss geben auch wir entsprechende

### 2.3.2. Punktweise Krümmungsabschätzungen

**Satz 3.** Sei  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{E}_\alpha$ -stabile  $C^2$ -Hyperfläche im  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0}$ , die der Wachstumsbedingung

$$\int_{\mathcal{M} \cap B_R^{m+1}(\mathfrak{x})} (x_{m+1})^\alpha d\mathcal{H}^m(x) \leq \tilde{c}(m, \alpha) \cdot k\left(\frac{\mathfrak{x}_{m+1}}{R}\right) \cdot R^{m+\alpha}$$

im Punkt  $\mathfrak{x} \in \mathcal{M}$  für ein  $R > 0$  genügt, wobei  $B_R^{m+1}(\mathfrak{x}) := \{y \in \mathbb{R}^{m+1} : |y - \mathfrak{x}| < R\}$  und

$$k(t) = 1 + t^\alpha \quad \text{oder} \quad k(t) = 1 + t^{\alpha+1}.$$

Ist ferner

$$(m, \alpha) \in \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

so ist die folgende punktweise Krümmungsabschätzung erfüllt:

$$|\mathbf{B}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{x})|^2 + \frac{1}{\alpha} |\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{x})|^2 \leq C\left(m, \alpha, k\left(\frac{\mathfrak{x}_{m+1}}{R}\right)\right) \cdot \frac{1}{R^2}.$$

**Bemerkung:**

Dieses Resultat verbessert für ganzzahliges  $\alpha$  die punktweisen Krümmungsabschätzungen aus DIERKES [5], da wir hierbei keine weiteren Fallunterscheidungen benötigen. Letzteres folgt aus der Tatsache, dass wir unter Betrachtung der rotierten Hyperfläche  $\mathbb{S}^\alpha \mathcal{M}$  auf Ergebnisse aus der Theorie minimaler Untermannigfaltigkeiten zurückgreifen können. Der ursprüngliche Beweis aus DIERKES [5] basiert auf einer verallgemeinerten Simons-Ungleichung, einer integralen Krümmungsabschätzung, einer geeigneten Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung, sowie einem Moser'schen Iterationsargument. Die notwendige Fallunterscheidung bei der punktweisen Krümmungsabschätzung folgt dabei aus einer Kleinheitsbedingung bei der entsprechenden Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung, vgl. DIERKES [5], aber auch die Ausarbeitung in DIERKES et al. [2, ch. 3]. Unser Satz 2 sagt aus, dass bei ganzzahligem  $\alpha$  eine geeignete Michael-Simon-Sobolev-Ungleichung ohne Kleinheitsbedingung hergeleitet werden kann, sodass wir durch Wiederholung des genannten Argumentationsschemas einen Nachweis der punktweisen Krümmungsabschätzungen aus Satz 3 erhalten. Tatsächlich können wir in Anbetracht von Proposition 11 auch direkt auf die punktweisen Krümmungsabschätzungen bei minimalen Hyperflächen von [SCHOEN, SIMON & YAU], in unserem Fall ausreichend in der Form von DIERKES et al. [2, sec. 3.6 thm 1], zurückgreifen:

*Beweis von Satz 3.* Nach Proposition 11 ist  $\mathbb{S}^\alpha \mathcal{M}$  eine stabile Hyperfläche in  $\mathbb{R}^{m+\alpha+1}$  und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^\alpha \mathcal{M} \cap B_R^{m+\alpha+1}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathfrak{x})} d\mathcal{H}^{m+\alpha} &\leq \int_{\mathbb{S}^\alpha \mathcal{M} \cap \mathbb{S}^\alpha B_R^{m+1}(\mathfrak{x})} d\mathcal{H}^{m+\alpha} = \int_{\mathbb{S}^\alpha (\mathcal{M} \cap B_R^{m+1}(\mathfrak{x}))} d\mathcal{H}^{m+\alpha} \\ &\stackrel{(2.5a)}{=} \sigma_\alpha \cdot \int_{\mathcal{M} \cap B_R^{m+1}(\mathfrak{x})} (x_{m+1})^\alpha d\mathcal{H}^m(x) \\ &\leq \sigma_\alpha \cdot \tilde{c}(m, \alpha) \cdot k\left(\frac{\mathfrak{x}_{m+1}}{R}\right) \cdot R^{m+\alpha}. \end{aligned}$$

Ferner haben wir  $m + \alpha \leq 5$ , sodass nach DIERKES et al. [2, sec. 3.6 thm 1] die folgende Abschätzung im Punkt  $e_1 \cdot \mathfrak{x} \in \mathbb{S}^\alpha \cdot \mathcal{M}$  erfüllt ist:

$$|\mathbb{B}_{\mathbb{S}^\alpha \cdot \mathcal{M}}(e_1 \cdot \mathfrak{x})|^2 \leq C \left( m, \alpha, k \left( \frac{\mathfrak{x}_{m+1}}{R} \right) \right) \cdot \frac{1}{R^2}.$$

Die Behauptung folgt schließlich aus der Darstellung der Norm der zweiten Fundamentalform der rotierten  $\mathcal{E}_\alpha$ -kritischen Fläche  $\mathcal{M}$ , vgl. Proposition 10. □

**Bemerkung 1:**

Dabei kann die Konstante gewählt werden als

$$C \left( m, \alpha, k \left( \frac{\mathfrak{x}_{m+1}}{R} \right) \right) = c(m, \alpha) \cdot \left[ k \left( \frac{\mathfrak{x}_{m+1}}{R} \right) \right]^{\frac{1+\tau}{2\tau}},$$

wobei  $\tau > 0$  beliebig mit

$$(1 + \tau)(m + \alpha) < 4 + 2\sqrt{\frac{2}{m + \alpha}}, \quad \text{m.a.W. für} \quad 0 < \tau < \frac{4 + 2\sqrt{\frac{2}{m + \alpha}}}{m + \alpha} - 1.$$

**Bemerkung 2:**

Die im Satz 3 geforderten Wachstumsbedingungen sind natürlich, in dem Sinne, dass diese für alle  $R > 0$  auf  $\mathcal{E}_\alpha$ -kritischen Graphen oder auf Rändern von  $\mathcal{P}_\alpha$ -Minimierern erfüllt sind, vgl. z.B. DIERKES [4, lemma 1 & 2], sowie DIERKES et al. [2, p. 196].

**Bemerkung 3:**

Es ist klar, dass wir mit obigen Krümmungsabschätzungen direkt Bernstein-Sätze für vollständige  $\mathcal{E}_\alpha$ -stabile Graphen beziehungsweise Hyperflächen, für  $(m, \alpha)$  wie in Satz 3, erhalten. Allerdings erzielte DIERKES bereits solche Bernstein-Sätze für  $m \geq 2$  und reellwertige  $\alpha > 0$  mit

$$m + \alpha < 4 + 2\sqrt{\frac{2}{m + \alpha}}, \quad \text{m.a.W. für} \quad m + \alpha < \frac{16}{3} \cos^2 \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \right) \\ \approx 5,236067978,$$

vgl. DIERKES [4] bzw. DIERKES et al. [2, sec. 3.4].

Mit der vorliegenden Arbeit haben wir insbesondere DIERKES Untersuchungen bezüglich  $\alpha$ -minimierender Hyperkegel und bezüglich punktwiser Krümmungsabschätzungen  $\mathcal{E}_\alpha$ -stabiler Hyperflächen ausgeweitet und verbessert. In beiden Fällen sind wir dabei neue Wege gegangen. Und in beiden Fällen ergeben sich neue Fragen:

1. Sind die im Beweis von Satz 1 angegebenen Schranken  $\alpha_m$  optimal?
2. Gelten die Aussagen der Sätze 2 und 3 auch für reellwertiges  $\alpha > 0$ ?

Ferner zeigte DIERKES in seinen Untersuchungen, dass als notwendige und hinreichende Bedingung für die  $\mathcal{E}_\alpha$ -Stabilität der Kegelmäntel  $\mathcal{M}_m^\alpha$  die Forderung

$$m + \alpha \geq 4 + \sqrt{8}$$

ist, vgl. DIERKES et al. [2, sec. 3.4]. Somit sind

$$\max\{4 - m + \sqrt{8}, 0\}$$

untere Schranken für optimale  $\alpha_m$ 's. Diesen Werten sind wir mit unseren Schranken relativ nahe gekommen, so haben wir bei  $m = 4$  insbesondere

$$\alpha_4 - \sqrt{8} < \frac{1}{1000}.$$

Bisher sind aber nur zwei Beispiele  $\mathcal{E}_\alpha$ -stabiler aber nicht- $\alpha$ -minimierender Hyperkegel – nämlich  $\mathcal{M}_2^5$  und  $\mathcal{M}_6^1$  – bekannt, vgl. DIERKES [2].

Um die zweite Frage zu klären, benötigt man einen neuen Zugang zum Problem, denn:

- der klassische Ansatz liefert zwar eine Aussage für reellwertiges  $\alpha$ , jedoch unter zusätzlichen Kleinheitsbedingungen, vgl. DIERKES et al. [2, ch. 3]; und
- der in der vorliegenden Arbeit präsentierte Ansatz ist nur für ganzzahliges  $\alpha$  anwendbar.

Es bleibt spannend, auf welchen Wegen die aufgeworfenen Fragen geklärt werden können!

D. BENARRÓS, M. MIRANDA,

*Lawson cones and the Bernstein theorem*, In: Advances in geometric analysis and continuum mechanics, Proceedings of a conference held in honor of the 70th birthday of Robert Finn (P. CONCUS, K. LANCASTER, eds.), International Press, Boston, 1995, 44 – 56.

E. BOMBIERI, E. DE GIORGI, and E. GIUSTI,

*Minimal cones and the Bernstein problem*, Inventiones Mathematicae 7 (1969), 243 – 268.

И. Н. БРОНШТЕЙН, К. А. СЕМЕНДЯЕВ

**Справочник по математике.**

издание тринадцатое, исправленное.

Москва «наука», 1986.

I. N. BRONSTEIN, K. A. SEMENDJAJEW

**Handbuch der Mathematik.**

Ausgabe dreizehn, korrigiert.

Moskau «Nauka», 1986.

Y. D. BURAGO, V. A. ZALGALLER

**Geometric inequalities.**

*Translated from the Russian by A. B. Sossinsky,*

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 285,

Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988.

C. CARATHÉODORY

**Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.**

1935.

P. CONCUS, M. MIRANDA,

*MACSYMA and minimal surfaces*, In: Geometric measure theory and the calculus of variations, Proceedings of symposia in pure mathematics 44 (W. K. ALLARD, F. J. ALMGREN, Jr., eds.), American Mathematical Society, Providence, RI, 1986, 163 – 169.

A. DAVINI,

*On calibrations for Lawson's cones*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova 111 (2004), 55 – 70.

G. DE PHILIPPIS, E. PAOLINI,

*A short proof of the minimality of Simons cone*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova 121 (2009), 233 – 241.

L. E. DICKSON

**First course in the theory of equations.**

John Wiley and Sons, Inc., New York, 1939.



**U. DIERKES**

- [1] *Minimal hypercones and  $C^{0,1/2}$ -minimizers for a singular variational problem*, Indiana University Mathematics Journal **37** (1988), no. 4, 841 – 863.
- [2] *A classification of minimal cones in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$  and a counterexample to interior regularity of energy minimizing functions*, Manuscripta Mathematica **63** (1989), 173 – 192.
- [3] **Über singuläre Lösungen gewisser mehrdimensionaler Variationsprobleme.**  
Habilitationsschrift, Universität des Saarlandes, 1989, erschienen in:  
Annales Universitatis Saraviensis **3** (1990), no. 2, 38 – 108.
- [4] *A Bernstein result for energy minimizing hypersurfaces*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **1** (1993), 37 – 54.
- [5] *Curvature estimates for minimal hypersurfaces in singular spaces*, Inventiones Mathematicae **122** (1995), 453 – 473.
- [6] *Singular minimal surfaces*, In: Geometric analysis and nonlinear partial differential equations (S. HILDEBRANDT, H. KARCHER, eds.), Springer, Berlin, 2003, 177 – 193.

**U. DIERKES, S. HILDEBRANDT, and F. SAUVIGNY****Minimal surfaces.**

Revised and enlarged second edition.

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **339**,

Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

**U. DIERKES, S. HILDEBRANDT, and A. J. TROMBA****[1] Regularity of minimal surfaces.**

Revised and enlarged second edition.

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **340**,

Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

**[2] Global analysis of minimal surfaces.**

Revised and enlarged second edition.

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **341**,

Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

**H. FEDERER****Geometric measure theory.**

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **153**,

Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

**M. GIAQUINTA, S. HILDEBRANDT****[1] Calculus of variations 1. The Lagrangian formalism**

Corrected second printing.

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **310**,

Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

- [2] **Calculus of variations 2.** The Hamiltonian formalism  
Corrected second printing.  
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **311**,  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

**E. GIUSTI**

**Minimal surfaces and functions of bounded variation.**  
Monographs in mathematics **80**,  
Birkhäuser Boston, Inc., 1984.

**H. B. LAWSON, Jr.**

*The equivariant Plateau problem and interior regularity*, Transactions of the American Mathematical Society  
**173** (1972), 231 – 249.

**F. MAGGI**

**Sets of finite perimeter and geometric variational problems.** An introduction to geometric measure theory  
Cambridge studies in advanced mathematics **135**,  
Cambridge University Press, 2012.

**U. MASSARI, M. MIRANDA**

*A remark on minimal cones*, Unione Matematica Italiana, Bollettino A, **6** (1983), 123 – 125.

**F. H. MICHAEL, L. M. SIMON**

*Sobolev and mean value inequalities on generalized submanifolds of  $\mathbb{R}^n$* , Communications on Pure and Applied Mathematics **26** (1973), 361 – 379.

**R. OSSERMAN**

*Minimal varieties*, Bulletin of the American Mathematical Society **75** (1969), 1092 – 1120

**R. S. PALAIS**

*The principle of symmetric criticality*, Communications in mathematical physics **69** (1979), 19 – 30.

**H. A. SCHWARZ**

*Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung*, Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Karl Weierstraß, Acta Societatis Scientiarum Fennicae **XV** (1888), 315 – 362.

**P. A. Q. SIMÕES**

**A class of minimal cones in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 8$ , that minimize area**  
Ph. D. thesis, University of California, Berkley, CA 1973.

**J. SIMONS**

*Minimal varieties in riemannian manifolds*, Annals of Mathematics (2) **88** (1968), 62 – 105.

**R. SCHOEN, L. M. SIMON, and S.-T. YAU**

*Curvature estimates for minimal hypersurfaces*, Acta Mathematica **134** (1974), 275 – 288.

R. THIELE

**Von der Bernoullischen Brachistochrone zum Kalibrator-Konzept.** Ein historischer Abriß zur Entstehung der Feldtheorie in der Variationsrechnung (hinreichende Bedingungen in der Variationsrechnung) Habilitationsschrift, Universität Hamburg, 2001, erschienen in:  
De Diversis Artibus: Collection de travaux de l'académie internationale d'histoire des sciences **80**, Brepols Publishers, Turnhout, Belgium, 2007.

W. WALTER

**Gewöhnliche Differentialgleichungen.**

7., Neubearb. und erw. Aufl.,  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

K. WEIERSTRASS

**Mathematische Werke.** 7. Vorlesungen über Variationsrechnung  
Reprografierter Nachdruck der Ausgabe Berlin 1927 [1967].